

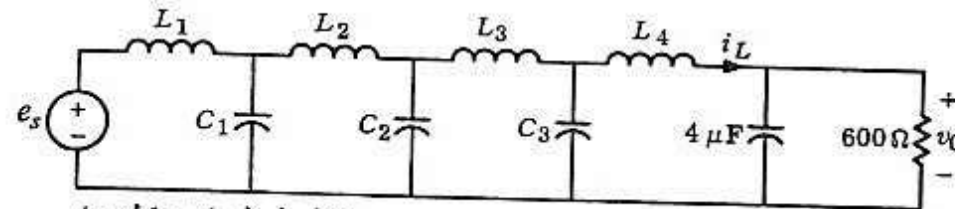
۱۶

قضایای شبکه‌ها

در این فصل، چهار قضیه بسیار کلی و سودمند شبکه‌ها را مورد مطالعه قرار می‌دهیم: قضیه جانشینی، قضیه جمع آثار، قضیه شبکه‌های معادل تونن-نرتن، و قضیه هم پاسخی. سودمندی این قضایا در مطالب زیر نهفته است: (۱) این قضایا در مورد طبقه بسیار بزرگی از شبکه‌ها که در عمل با آنها برخورد می‌کنیم، به کار می‌روند. (۲) نتایج این قضایا بسیار ساده است. این کلیت و سادگی، ممکن است فریب دهنده باشد. بعضی افراد در اکثر موارد وسعت کاربرد این قضایا را به خوبی درک نمی‌کنند.

فرض اساسی که تمام قضایای شبکه‌ها بر مبنای آن بنیان‌گذاری می‌شوند، یکا بودن جواب شبکه‌های مورد مطالعه است. در بخش‌های ۷ و ۸ فصل ۱۳، این حقیقت را بحث کردیم که در شبکه‌های خطی (به جز حالت‌های ساده)، برای هر دسته از ورودی‌ها و شرایط اولیه داده شده، جواب همواره یکتا است. قضیه جانشینی یک قضیه بسیار ساده ولی کلی است که برای تمام شبکه‌هایی که دارای جواب یکتا هستند، صادق است. این قضیه را می‌توان در مورد شبکه‌های خطی، غیرخطی، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان به کار برد. سه قضیه دیگر، تنها برای شبکه‌های خطی به کار می‌روند. به خاطر بیاورید که یک شبکه خطی به موجب تعریف، شامل عناصر خطی یا منابع ناپسته می‌باشد. این منابع ناپسته ورودی‌های شبکه هستند. قضیه جمع آثار و قضیه شبکه‌های معادل تونن-نرتن، در مورد تمام شبکه‌های خطی به کار می‌روند. قضیه هم پاسخی در مورد طبقه بسیار محدودی از شبکه‌های خطی به کار می‌رود. اجزای این شبکه‌ها باید تغییرناپذیر با زمان بوده و شامل منابع وابسته و منابع ناپسته و ژیراتورها نباشند. ژیراتور یک دوقطبی خطی تغییرناپذیر با زمان است

۱- قضیه جانشینی



شکل ۵-۱ یک شبکه نردبانی.

جریان i_L مقدار $10 \cos 377t$ میلی‌آمپر را نشان می‌دهد. ولتاژ خروجی v را محاسبه کنید.

2-7
98-2
ر. بیات

اهمیت قضیه جمع آثار جای بحث ندارد، زیرا این قضیه اساس بسیاری از کاربردهای روزانه سیستم‌های مهندسی از قبیل سیستم‌های صوتی با فیدلیتی بالا، سیستم‌های تلفنی، سیستم‌های انتشار، قطعات کامپیوتر آنالوگ و ابزار و روشهای اندازه‌گیری متعددی را تشکیل می‌دهد.

قضیه جمع آثار، صرف‌نظر از جزئیات آن، بدین معنی است که برای یک شبکه خطی، پاسخ حالت صفر ناشی از اعمال همزمان چند منبع ناهسته، برابر مجموع پاسخهای حالت صفر ناشی از اعمال هر یک از این منابع ناهسته وقتی که به تنهایی عمل می‌کنند، می‌باشد. اکنون این مفهوم را با یک سیستم میکروفن - تقویت‌کننده - بلندگو با فیدلیتی بالا، تشریح می‌کنیم. چنانچه خود را تنها به جنبه‌های مدار الکتریکی آن محدود سازیم، می‌توان میکروفن را به عنوان یک منبع ولتاژ سری با یک امپدانس و نیز خروجی مدار را، جریان در یک سیم‌پیچ تحریک بلندگو تصور کرد. فرض کنید که بخواهیم موزیک ایجاد شده به وسیله یک ویلون و یک پیانو را تقویت کنیم. اگر قضیه جمع آثار در این مورد به کار رود، هنگامی که ویلون و پیانو همزمان نواخته می‌شوند، پاسخ کل برابر مجموع پاسخهای ناشی از نواخته شدن هر یک به تنهایی است. ولی چنانچه قضیه جمع آثار در این مورد برقرار نشود، آنچه که می‌شنویم مجموع پاسخهای مربوط به هر یک به اضافه "تأثیر متقابل" آنها است. تأثیر چنین فرایندی را هنگامی که یک ارکستر ۱۴۰ تکه‌ای اجرا می‌شود، تصور کنید! با توجه به اینکه طرفداران فیدلیتی بالا همواره خواستار این هستند که صدای یک ویلون، صرف‌نظر از اینکه یک پیانو هم به طور همزمان با آن نواخته می‌شود یا نه، باید همواره صدای ویلون را بدهد، از این رو طراحان سیستم‌های فیدلیتی بالا باید اطمینان حاصل کنند که طرح آنها به سیستم خطی منجر می‌شود. زیرا در چنین حالتی آنها مطمئن هستند که قضیه جمع آثار برقرار است.

تبصره ۱ قضیه جمع آثار یک قضیه بسیار کلی است و در مورد تمام شبکه‌های خطی، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان، به کار می‌رود.

تبصره ۲ قضیه جمع آثار را می‌توان برحسب مفهوم یک تابع خطی بیان کرد.

$$\text{Out}=(x+y)^2$$

$$x^2+y^2+2xy$$

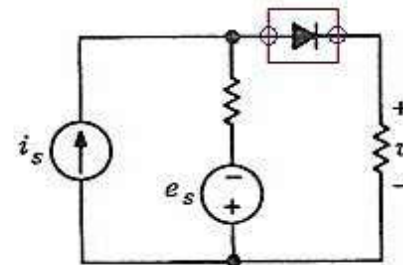
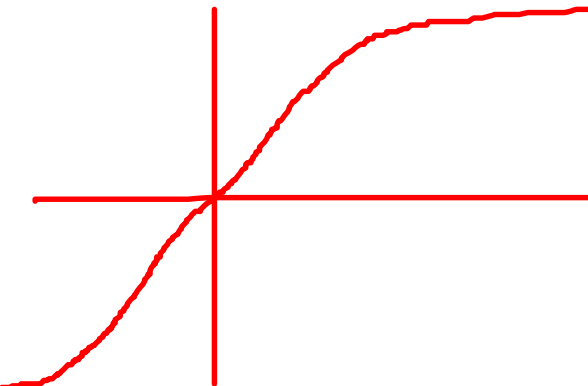
$$\text{Cos}(w_1t)*\text{Cos}(w_2t)$$

$$\text{Cos}(w_1+w_2)t$$

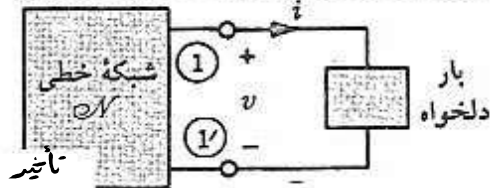
$$w_1-w_2$$

$$\text{Out}=100*x$$

$$\text{Out}=100*(\text{piano}+\text{violin}+\text{trumpett}+\text{clarinet}+)$$

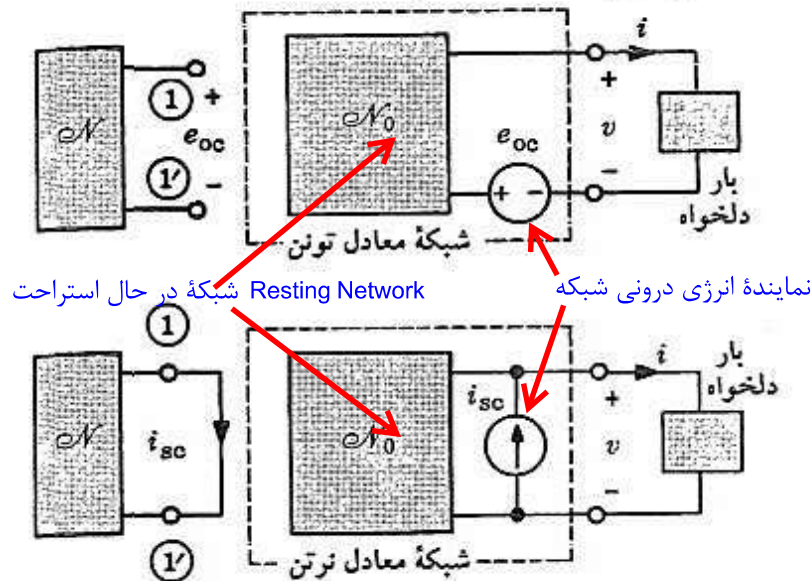


۳- قضیه شبکه معادل تونن-نرتن



قضیه تونن - نرتن، یک روش مؤثر در محاسبه پاسخ شبکه‌های پیچیده است. این قضیه به علت اینکه یک تصویر ذهنی از آنچه که در دوسر شبکه خطی دیده می‌شود در اختیار ما می‌گذارد، اهمیت 3-7
98-2
1001 ر. بیات

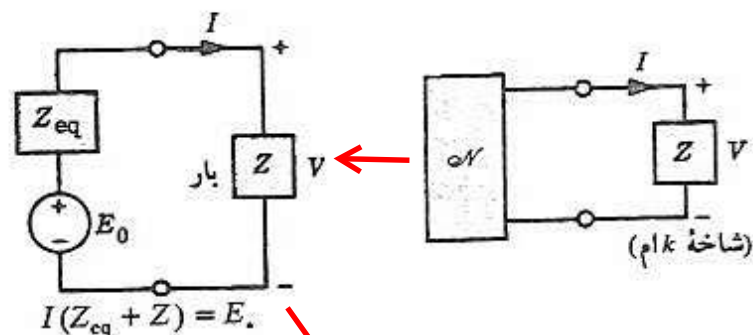
تاخیر متقابل میان $\mathcal{N}$ و بار تنها از طریق جریانی که از سرهای ① و ①' جاری می‌شود، حاصل می‌گردد.
هیچگونه تزویج دیگری، (مانند تزویج مغناطیسی یا از طریق منابع وابسته) میان شبکه $\mathcal{N}$ و بار فوق وجود ندارد.
تأکید این حقیقت حائز اهمیت است که هیچگونه فرضی در مورد بار به عمل نمی‌آوریم. غیرخطی و/ یا تغییرپذیر با زمان
شبکه $\mathcal{N}$ تنها لازم است که خطی باشد. ممکن است شبکه شامل منابع وابسته و نایسته باشد.



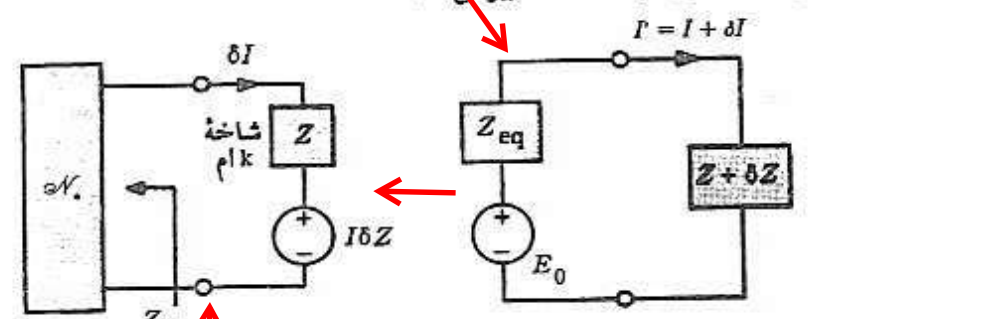
Resting Network شبکه در حال استراحت

نمایندۀ انرژی درونی شبکه

مطالعه حساسیت با به کار بردن قضیه تونن



امپدانس شاخه k از Z به $Z + \delta Z$ تغییر می‌کند.



Small Signal Equivalent CCT (when E_0 is eliminated)

$$I'(Z_{eq} + Z + \delta Z) = (I + \delta I)(Z_{eq} + Z + \delta Z) = E_0$$

$$I \delta Z + \delta I(Z_{eq} + Z) + \delta I \delta Z = 0$$

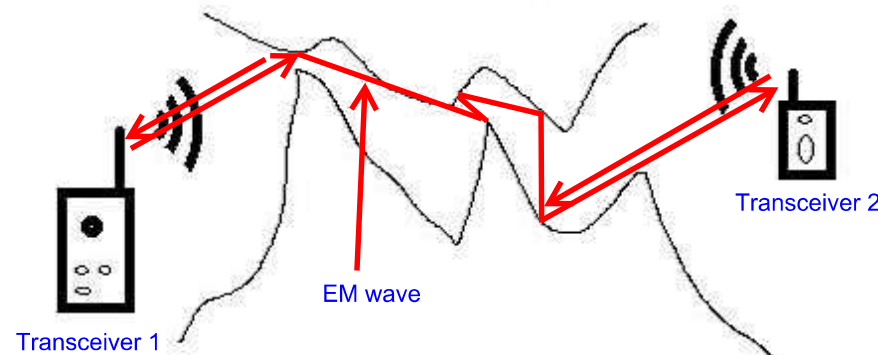
$$\frac{\delta I}{I} \approx \frac{-\delta Z}{Z_{eq} + Z}$$

هم پاسخی خاصیتی است که اغلب در فیزیک با آن روبرو هستیم. این خاصیت، در الکترواستاتیک، مکانیک، آکوستیک و غیره پیش می آید. بنابراین، نباید از اینکه در مدارها هم ظاهر می شود متعجب شویم. هنگامی که دقیق صحبت نکنیم، هر وقت هم پاسخی در مورد یک سیستم فیزیکی به کار می رود، می توان بی آنکه پاسخ سیستم را به یک شکل موج ورودی داده شده تغییر داد، ورودی و خروجی را با هم تعویض کرد. این خاصیت نه تنها در تجزیه و تحلیل و طرح سیستم ها فوق العاده مهم است، بلکه در اندازه گیری نیز حائز اهمیت زیاد است.

هم پاسخی در مدارهای الکتریکی، در مورد زیر دسته ای از تمام شبکه های خطی تغییرناپذیر با زمان به کار می رود. شبکه هایی که این خاصیت در آنها قابل به کار بردن است، ممکن است دارای مقاومتها، سلفها، سلفهای تزویج شده، خازنها و ترانسفورماتورها باشند. لیکن ژراتورها^۱ و منابع وابسته و ناپسته، نباید در آنها وجود داشته باشند. ما علامت N_R را برای مشخص کردن شبکه هایی که این شرایط را برمی آورند، به کار خواهیم برد (زیرنویس R نشان دهنده هم پاسخی است).

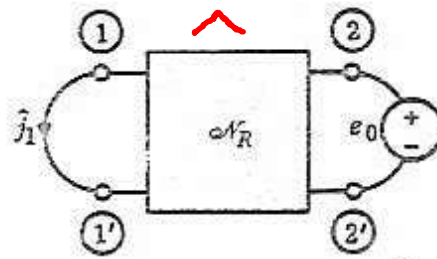
یک خط تلفن میان این دو نقطه A و B را به عنوان مثال در نظر بگیرید و فرض کنید که در این مدار، تنها عناصر مجاز نامبرده در بالا وجود داشته باشند. توجه کنید که چون مقاومتها هم در لیست عناصر مجاز می باشند، پس این مدار تلفنی ممکن است شامل تقویت کننده هایی با مقاومت متغی نیز باشد. تنها بر مبنای این اطلاعات، قضیه هم پاسخی مجاز می دارد چنین نتیجه بگیریم که عمل انتقال از A به B ، همانند عمل انتقال از B به A می باشد. واضح است که این مطلب طرح و آزمایش خطوط تلفنی را به مقدار زیادی ساده می کند.

فرض کنید N_R شبکه دلخواهی باشد که از عناصر مجاز ساخته شده است. قضیه هم پاسخی آزادی قابل ملاحظه ای در اینکه به چه طریق منبع را اعمال کرده و پاسخ آن را اندازه گیری کنیم، به وجود می آورد.

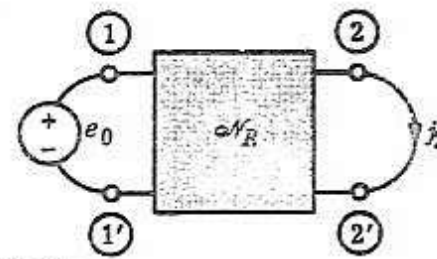


1001 5-7
98-2
ر. بیات

$$y_{1r}(s) \triangleq \frac{\hat{J}_1(s)}{E_*(s)}$$

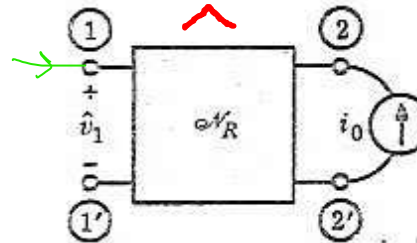


بیان ۱ قضیه هم پاسخی
 $j_1(0)$ و $\hat{j}_1(0)$ برابر هستند

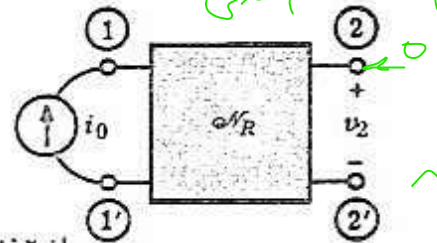


$$y_{r1}(s) \triangleq \frac{J_r(s)}{E_*(s)}$$

$$z_{1r}(s) \triangleq \frac{\hat{V}_1(s)}{I_*(s)}$$



بیان ۲ قضیه هم پاسخی
 $v_1(0)$ و $\hat{v}_1(0)$ برابر هستند



$$z_{r1}(s) \triangleq \frac{V_r(s)}{I_*(s)}$$

ست پ از ست ۱ اصلی

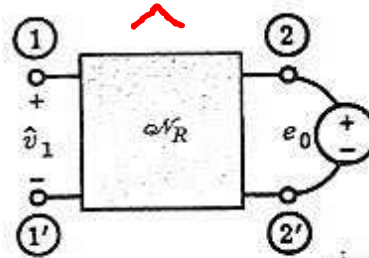
$$V_b I'_b = V'_a I_a$$

$$V_2 I_0 = \hat{V}_1 I_0$$

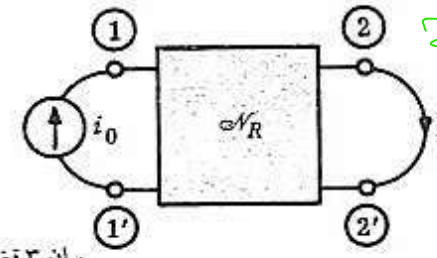
$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_0} = \frac{\hat{V}_1}{I_0} = ?$$

$$Z_{21} = \frac{V_2}{I_0} = \frac{\hat{V}_1}{I_0} = ?$$

$$H_{12}^V(s) \triangleq \frac{\hat{V}_1(s)}{E_*(s)}$$

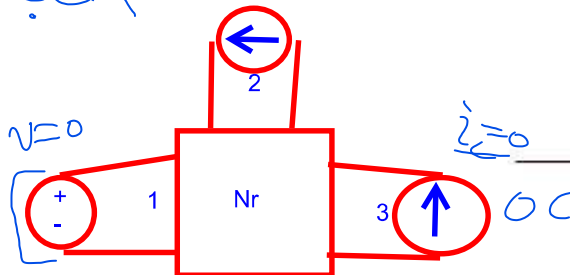


بیان ۳ قضیه هم پاسخی
اگر $i_*(0)$ و $e_*(0)$ برابر باشند، $\hat{v}_1(0)$ و $j_2(0)$ برابر خواهند بود



$$H_{21}^I(s) \triangleq \frac{J_r(s)}{I_*(s)}$$

۳ قلب



$$V_k(s) \hat{J}_k(s) = Z_k(s) J_k(s) \hat{J}_k(s) = J_k(s) [Z_k(s) \hat{J}_k(s)] = \hat{V}_k(s) J_k(s)$$

Generalization to multiport systems

$$V_1 I'_1 + V_2 I'_2 + V_3 I'_3 =$$

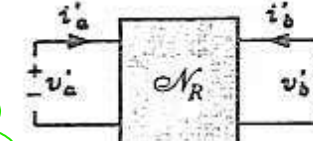
$$V'_1 I_1 + V'_2 I_2 + V'_3 I_3$$

از به هم پیوستن تعداد دلخواهی مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده
آزمایش ۱:

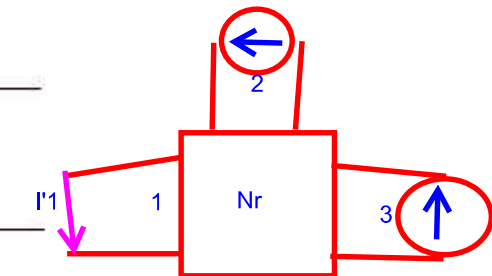


$$v_a i'_a + v_b i'_b = v'_a i_a + v'_b i_b$$

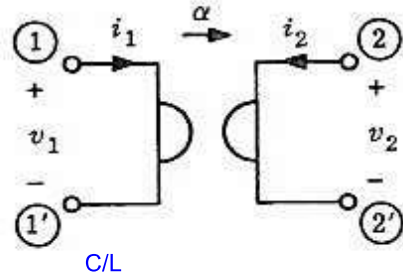
$$V_a I'_a + V_b I'_b = V'_a I_a + V'_b I_b$$



آزمایش ۲:



بعضی کتابها پیشنهاد می کنند که تمام شبکه هایی که تنها از عناصر خطی تغییرناپذیر با زمان
پسیو ساخته می شوند، متقابل هستند. چنین بیانی صحیح نیست. برای نشان دادن این مطلب، یک عنصر
دوقطبی جدید را که ژیراتور خوانده می شود معرفی می کنیم. ژیراتور، به موجب تعریف، یک عنصر
دوقطبی است (نشان داده شده در شکل (۴-۱۲)) که به وسیله معادلات زیر، توصیف می شود:



$$v_1(t) = \alpha i_2(t)$$

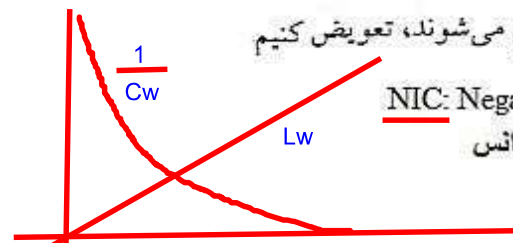
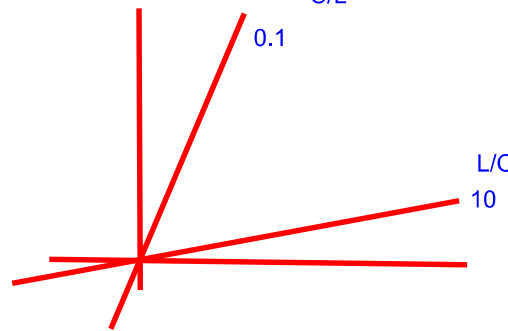
$$v_2(t) = -\alpha i_1(t)$$

$$\begin{bmatrix} v_1(t) \\ v_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ -\alpha & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \end{bmatrix}$$

نسبت گردشی α

$$v_1(t)i_1(t) + v_2(t)i_2(t) = 0 \quad \text{پسیو Passive}$$

بیان ۲ از قضیه هم پاسخی



سلفها را با ژیراتورهایی که به خازن ها ختم می شوند، تعویض کنیم

NIC: Negative Impedance Convertor
مدل معکوس کننده ی امپدانس

■ هر شبکه ای را که از قضیه هم پاسخی پیروی کند متقابل گویند. پسیو بودن هیچ اثری در متقابل بودن
ندارد. شبکه های خطی تغییرناپذیر با زمان پسیوی وجود دارند که متقابل نمی باشند. هر شبکه
 $RLCM$ خطی تغییرناپذیر با زمان (که بعضی از عناصر آن ممکن است اکتیو باشند) متقابل است.
شبکه های خطی تغییرناپذیر با زمان خاصی وجود دارند که شامل منابع وابسته بوده و متقابل هم
هستند.

■ ژیراتور یک عنصر دوقطبی خطی تغییرناپذیر با زمان است که نه از خارج انرژی جذب کرده و نه به
خارج انرژی تحویل می دهد. ژیراتور مثالی از یک عنصر پسیو است که متقابل نمی باشد.

نتیجه عجیب برای شبکه های هم شکل



$$\sum_{k=1}^b v_k j_k = 0$$

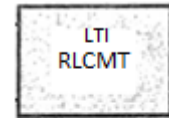
$$\sum_{k=1}^b v'_k j_k = 0$$

قضیه تلگان (فصل ۹)

$$\sum_{k=1}^b v_k j_k = \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\beta=1}^{n+1} \left[\frac{1}{2} (e_\alpha - e_\beta) j_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} (e_\beta - e_\alpha) j_{\beta\alpha} \right]$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\beta=1}^{n+1} [e_\alpha j_{\alpha\beta} - e_\beta j_{\alpha\beta} + e_\beta j_{\beta\alpha} - e_\alpha j_{\beta\alpha}]$$

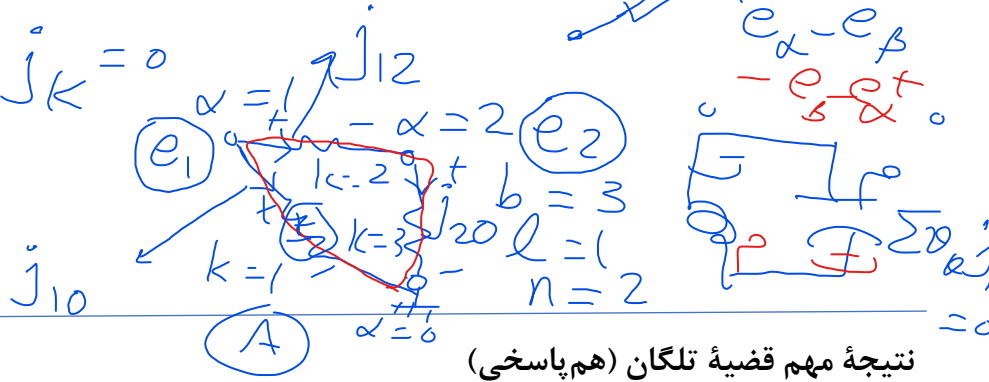
$$= \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\beta=1}^{n+1} e_\alpha j_{\alpha\beta} = 0$$



$$\sum_{k=1}^b v_k j_k = 0$$

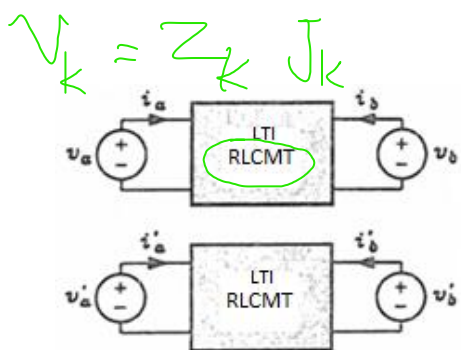
$$\sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\beta=1}^{n+1} e_\alpha j_{\alpha\beta} = 0$$

$$\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n+1} \sum_{\beta=1}^{n+1} j_{\alpha\beta} = 0 \quad (K < L)$$



نتیجه مهم قضیه تلگان (هم پاسخی)

تعمیم نتیجه مهم (هم پاسخی)



$$v_a j'_a + v_b j'_b = v'_a j_a + v'_b j_b$$

$$v_a i'_a + v_b i'_b = v'_a i_a + v'_b i_b$$

$$\sum v_k j_k = \sum v'_k j'_k$$

$$\sum v_k j_k = 0$$

نرخ کنید N یک دو قطبی باشد که از به هم پیوستن تعداد دلخواهی مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان ساخته شده باشد. دو آزمایش زیر را در نظر بگیرید.



آزمایش ۱: دو منبع ولتاژ v_a و v_b را به دو قطب N اعمال کرده و جریانهای قطب i_a و i_b را اندازه می گیریم.



آزمایش ۲: دو منبع ولتاژ v'_a و v'_b را به دو قطب N اعمال کرده و جریانهای قطب i'_a و i'_b را اندازه می گیریم.

ثابت کنید این دو دسته اندازه گیری ها به صورت زیر به هم مربوط هستند:

$$v_a i'_a + v_b i'_b = v'_a i_a + v'_b i_b$$

$$v_k = R_k j'_k$$

$$v'_k = R_k j_k$$