1-6
98-2
ر. بیات

۱۵ توابع شبکه

در این فصل، شبکه‌های خطی تغییرناپذیر با زمان

در فصل ۱۴ پاسخهای ورودی صفر   در این فصل پاسخهای حالت صفر

ارتباط قطب‌ها و صفرهای تابع شبکه و پاسخ فرکانسی

تعبیر فیزیکی قطب‌ها و صفرهای تابع شبکه

مداریک   در فصل ۷، تابع شبکه برای پاسخهای حالت دایمی سینوسی

مداردو   در فصل ۱۳ با استفاده از تبدیل لاپلاس تعمیم برای حالت کلی

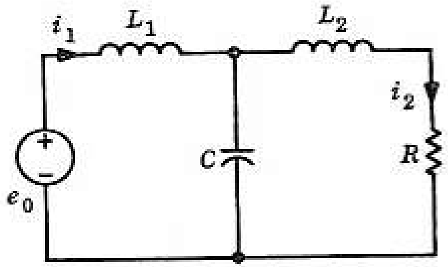
ω فرکانس حقیقی $s = \sigma + j\omega$ فرکانس مختلط

$$\boxed{\text{تابع شبکه} = \frac{\mathcal{L}[\text{پاسخ حالت صفر}]}{\mathcal{L}[\text{ورودی}]}}$$

امپدانس نقطهٔ تحریک R ، sL و $\frac{1}{sC}$ = نسبت تبدیل لاپلاس پاسخ ولتاژ حالت صفر به تبدیل لاپلاس جریان تحریک یک‌قطبی

ادمیتانس نقطهٔ تحریک $\frac{1}{R}$ ، $\frac{1}{sL}$ و sC

مثال صافی پایین‌گذر   تابع شبکه ادمیتانس انتقالی $H(s) = \frac{I_2}{E_0}$



$$\left(L_1 s + \frac{1}{Cs}\right)I_1 - \frac{1}{Cs}I_2 = E_0$$

$$-\frac{1}{Cs}I_1 + \left(\frac{1}{Cs} + L_2 s + R\right)I_2 = 0$$

$$I_2 = \frac{\frac{E_0}{Cs}}{\begin{vmatrix} L_1 s + \frac{1}{Cs} & -\frac{1}{Cs} \\ -\frac{1}{Cs} & \frac{1}{Cs} + L_2 s + R \end{vmatrix}} = \frac{E_0}{L_1 L_2 C s^3 + R L_1 C s^2 + (L_1 + L_2)s + R}$$

$$H(s) = \frac{I_2}{E_0} = \frac{1}{L_1 L_2 C s^3 + R L_1 C s^2 + (L_1 + L_2)s + R}$$

2-6
98-2
ر. بیات

خاصیت کلی در بخش ۵ فصل ۱۳ نشان دادیم که توابع شبکه، توابع گویایی از متغیر فرکانس مختلط s بوده و ضرایب حقیقی دارند. حقیقت فوق را در سه مثال بالا مشاهده کردیم. این حقیقت برای هر شبکهٔ فشردهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان صحیح است. در حالت کلی:

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

که $P(s)$ و $Q(s)$ چندجمله‌ای‌هایی برحسب متغیر s بوده و ضرایب a_0 ، a_1 ، ... ، a_n ، b_0 ، b_1 ، ... ، b_m اعداد حقیقی هستند. این ضرایب، بدین دلیل حقیقی هستند که هر یک از آنها مجموعی از حاصلضرب‌های مقادیر اجزای مقاومت‌ها، سلف‌ها، خازن‌ها و غیره می‌باشد و مقادیر این اجزا به‌وسیلهٔ اعداد حقیقی مشخص می‌شوند.

به صورت تجزیه شده:

$$H(s) = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

که K یک ضریب (حقیقی) بوده و z_iها، $i = 1 , 2 , \cdots , m$ **صفرهای** تابع شبکه و p_jها، $j = 1 , 2 , \cdots , n$ **قطبهای** تابع شبکه خوانده می‌شوند. بدین‌ترتیب، یک نوع دیگر مشخص‌سازی کامل یک تابع شبکه به وسیلهٔ m صفر (z_1 ، z_2 ، ... ، z_m) و n قطب (p_1 ، p_2 ، ... ، p_n) و ضریب K بیان می‌شود.

از آنجا که چندجمله‌ای صورت $P(s)$ و چندجمله‌ای مخرج $Q(s)$ ضرایب حقیقی دارند، صفرها و قطب‌ها یا باید حقیقی باشند یا به صورت جفت‌های مزدوج مختلط ظاهر شوند.

اگر $p_1 = \sigma_1 + j\omega_1$ یک قطب باشد، یعنی $Q(p_1) = 0$ گردد، در این صورت $\bar{p}_1 = \sigma_1 - j\omega_1$ نیز یک قطب خواهد بود، یعنی $Q(\bar{p}_1) = 0$.

اگر $z_2 = \sigma_2 + j\omega_2$ یک صفر باشد، یعنی $P(z_2) = 0$ گردد، در این صورت $\bar{z}_2 = \sigma_2 - j\omega_2$ نیز یک صفر خواهد بود، یعنی $P(\bar{z}_2) = 0$.

آنچه در بالا گفته شد، نتایج مستقیم این حقیقت است که هر چندجمله‌ای $F(s)$ با ضرایب حقیقی، دارای خاصیت زیر است:

$$\overline{F(s)} = F(\bar{s}) \qquad \text{برای تمام } s$$

یا:

$$\overline{F(\sigma + j\omega)} = F(\sigma - j\omega) \qquad \text{برای تمام } \sigma \text{ و } \omega \text{ حقیقی}$$

فرض کنید $H(s)$ دارای یک صفر و سه قطب باشد. صفر در $s = 2$ و قطبها در $s = -3$ و $s = -1 \pm j2$ با دانستن اینکه $H(0) = 1$ است، $H(s)$ را به شکل یک تابع گویا بیان کنید.

H(s)= K (s-2) / (s+3)[(s+1)^2+4]

۱۰-۱ نمایش شرایط اولیهٔ خازن‌ها و سلف‌ها با منابع مناسب

3-6
98-2
ر. بیات

۲- قطبها، صفرها و پاسخ فرکانسی

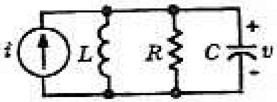
در فصل ۱۳ دیدیم که اگر در تابع شبکهٔ $H(s)$ به جای s ، $j\omega$ را جایگزین کنیم، $H(j\omega)$ به‌دست می‌آید، که به صورت نسبت فازورهای نشان‌دهندهٔ پاسخ حالت دایمی سینوسی به ورودی سینوسی متناظر تعریف می‌گردد. بنابراین، درک چگونگی تغییرات یک تابع شبکه هنگامی که $s=j\omega$ بوده و ω از صفر تا ∞ تغییر می‌کند، اهمیت خاصی دارد. بدین طریق، می‌توان خواص حالت دایمی سینوسی را از فرکانس‌های بسیار پایین تا فرکانس‌های بسیار بالا پیش چشم خود مجسم ساخت. از آنجایی که برای هر فرکانس معین ω ، $H(j\omega)$ معمولاً یک عدد مختلط می‌باشد، ما آن را به‌صورت قطبی نمایش می‌دهیم:

$$H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{j\measuredangle H(j\omega)} \qquad (۱-۲)$$

که در آنجا $|H(j\omega)|$ را اندازه و $\measuredangle H(j\omega)$ را فاز تابع شبکه در فرکانس ω گویند.

اندازه و فاز یک تابع شبکه اهمیت بسیار زیادی دارند. زیرا انها نه تنها پاسخ حالت دایمی سینوسی را در هر فرکانسی به دست می‌دهند، بلکه محتوی تمام اطلاعات لازم برای محاسبهٔ پاسخ حالت صفر ناشی از یک ورودی دلخواه نیز می‌باشند. از دیدگاه عملی، منحنی‌های اندازه و فاز نسبت به فرکانس در آزمایشگاه به‌راحتی اندازه‌گیری می‌شوند. حتی می‌توان آنها را با دقت بسیار زیادی هم اندازه‌گیری نمود. اطلاعات روی هم مربوط به اندازه و فاز یک تابع شبکه برای تمام ω ، معمولاً **پاسخ فرکانسی** گفته می‌شود. دراین بخش، ما ارتباط میان قطبها، صفرها و پاسخ فرکانسی را بررسی خواهیم کرد.

مثال مدار RLC موازی تطبیق شده که توسط یک منبع جریان تحریک می‌شود



$$V(s) = \frac{1}{Cs + G + \frac{1}{Ls}} I(s)$$

$$H(s) = \frac{1}{C}\frac{s}{s^2 + \frac{G}{C}s + \frac{1}{LC}}$$

Q از $\frac{1}{2}$ بزرگتر $\quad = \frac{1}{C}\frac{s-0}{[s-(-\alpha+j\omega_d)][s-(-\alpha-j\omega_d)]} \qquad \omega_0^2 \triangleq \frac{1}{LC} \qquad \omega_d \triangleq \sqrt{\omega_0^2-\alpha^2} \qquad \alpha \triangleq \frac{G}{2C}$

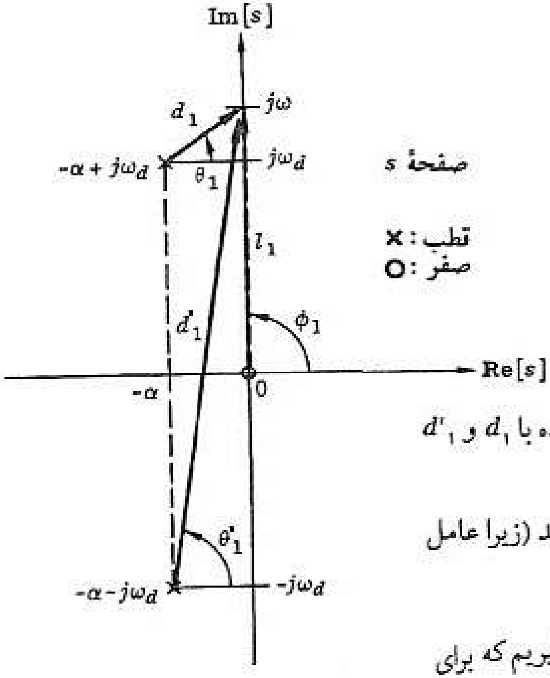
تابع شبکه یک صفر در $s=0$ و یک جفت قطب مزدوج مختلط در $-\alpha \pm j\omega_d$ دارد.

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{C}\frac{|j\omega - 0|}{|j\omega-(-\alpha+j\omega_d)|\,|j\omega-(-\alpha-j\omega_d)|}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle(j\omega-0) - \measuredangle[j\omega-(-\alpha+j\omega_d)] - \measuredangle[j\omega-(-\alpha-j\omega_d)]$$

برای درک ارتباط بین مکان صفر-قطب ها با منحنی های اندازه و فاز، لازم است به درک عمیق تری از این مفاهیم برسیم.

4-6
98-2
ر. بیات



$$|H(j\omega)| = \frac{1}{C}\frac{|j\omega - 0|}{|j\omega - (-\alpha + j\omega_d)|\,|j\omega - (-\alpha - j\omega_d)|}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \measuredangle(j\omega - 0) - \measuredangle[j\omega - (-\alpha + j\omega_d)] - \measuredangle[j\omega - (-\alpha - j\omega_d)]$$

$$|H(j\omega)| = \frac{1}{C}\frac{l_1}{d_1 d'_1}$$

$$\measuredangle H(j\omega) = \phi_1 - \theta_1 - \theta'_1$$

نتیجه :

۱- $H(0) = 0$

۲- برای $\omega > 0$ و $\omega \ll \omega_d$ ، $\measuredangle H(j\omega) \approx 90°$ است (زیرا زوایای بردارهای نشان داده شده با d_1 و d'_1 تقریباً همدیگر را حذف می‌کنند).

۳- با افزایش ω ، $|H(j\omega)|$ نیز افزایش یافته و در حدود $\omega \approx \omega_d$ به حداکثر خواهد رسید (زیرا عامل مخرج d_1 حداقل می‌گردد).

۴- با استفاده از این حقیقت که در مورد شکل (۲-۲)، $\alpha \ll \omega_d$ می‌باشد، نتیجه می‌گیریم که برای $j\omega = j\omega_d$ ، $d'_1 \approx 2\omega_d$ بوده و بنابراین:

$$|H(j\omega_d)| \simeq \frac{1}{C}\frac{\omega_d}{\alpha 2\omega_d} = \frac{1}{2\alpha C} = \frac{1}{G} = R$$

۵- $\measuredangle H(j\omega_d) \approx 0°$ (زیرا $\theta'_1 = 90°$ است).

۶- هنگامی که ω از ω_d بیشتر می‌گردد، $|H(j\omega)|$ کاهش یافته و موقعی که $\omega \to \infty$ می‌رود، این مقدار به سمت صفر میل می‌کند. در واقع وقتی $\omega \gg \omega_d$ باشد، دو عامل مخرج d_1 و d'_1 متناسب با ω بوده، و عامل صورت برابر ω می‌گردد. از این‌رو $|H(j\omega)|$ با $\frac{1}{\omega}$ متناسب می‌باشد.

شکل منحنی‌ها به نسبت $\frac{\omega_0}{\alpha}$ ، یعنی به Q بستگی دارند

نتایج کلی این تعبیرهای ترسیمی منحنی‌های اندازه و فاز، به بعضی از ایده‌های کلی که مکان‌های قطبها و صفرها را به مقادیر ضریب تقویت و فاز ارتباط می‌دهند، منجر می‌گردد: (۱) در حوالی قطبی که در نزدیکی محور $j\omega$ قرار دارد، انتظار داریم که اندازهٔ تابع شبکه یک ماکزیمم محلی داشته و فاز آن سریعاً تغییر نماید؛ (۲) در حوالی صفری که در نزدیکی محور $j\omega$ قرار دارد، انتظار داریم که اندازهٔ تابع شبکه کوچک بوده و فاز آن به سرعت تغییر کند. بدین ترتیب، یک ایدهٔ مفید طرح شبکه به دست می‌آوریم و آن اینکه، در قسمتی که بخواهیم اندازهٔ تابع شبکه بزرگتر باشد، تعداد قطبها را زیاد می‌کنیم، و در جایی که بخواهیم اندازهٔ تابع شبکه کوچکتر باشد، تعداد صفرها را زیاد می‌کنیم. فرمول‌ها از لحاظ طراحی مدار بسیار اهمیت دارند. چون قطبها و صفرها را به اندازه و فاز تابع شبکه ارتباط می‌دهند.

در بخش بعد خواهیم دید که رفتار پاسخ ضربهٔ شبکه با محل قطبها و صفرهای تابع شبکه ارتباط نزدیکی دارد.

5-6
98-2
ر. بیات

۳- قطبها، صفرها و پاسخ ضربه

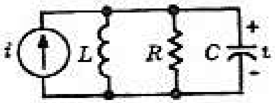
در بخش پیش دیدیم که دانستن محل قطبها و صفرها چگونه ما را قادر ساخت که شکل منحنی‌های اندازه و فاز هر تابع شبکه را با روش ترسیمی نتیجه بگیریم. اکنون می‌خواهیم این ایده‌ها را بیشتر بررسی کرده و آنها را به رفتار پاسخ ضربه ارتباط دهیم.

بررسی فوق را با این یادآوری شروع می‌کنیم که معکوس تبدیل لاپلاس تابع شبکه، همان پاسخ ضربهٔ متناظر است، یعنی:

$$\mathcal{L}^{-1}[H(s)] = h(t)$$

بررسی ارتباط میان محل‌های قطبها و صفرها و پاسخ ضربه

مثال



$$H(s) = \frac{1}{C}\frac{s}{s^{2} + \left(\frac{G}{C}\right)s + \frac{1}{LC}} = \frac{1}{C}\frac{s}{s^{2} + 2\alpha s + \omega_0^{2}}$$

برای $Q > \frac{1}{2}$:

$$h(t) = \frac{1}{C}u(t)\,e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \phi)$$

(۱) فاصلهٔ میان قطب و محور $j\omega$ یعنی α ، سرعت میرایی پاسخ ضربه را تعیین می‌کند.

هر چه قطب به محور $j\omega$ نزدیکتر باشد، سرعت میرایی کمتر خواهد بود و اگر قطب روی محور $j\omega$ قرار بگیرد، هیچگونه میرایی وجود نخواهد داشت. (pure LC)

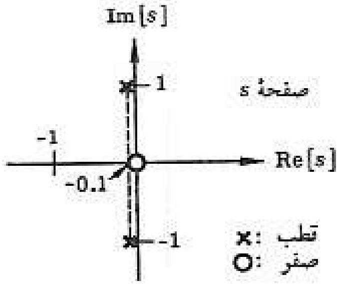
اگر قطب در سمت راست محور $j\omega$ قرار گیرد، پاسخ ضربه نمایی افزایشی خواهد بود! unstable system

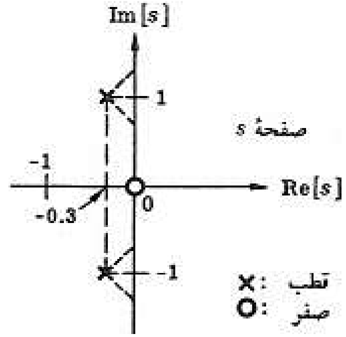
(۲) عرض قطب یعنی ω_d ، فاصلهٔ میان تقاطع‌های صفر متوالی پاسخ ضربه، یعنی $\frac{2\pi}{\omega_d}$ را تعیین می‌کند.

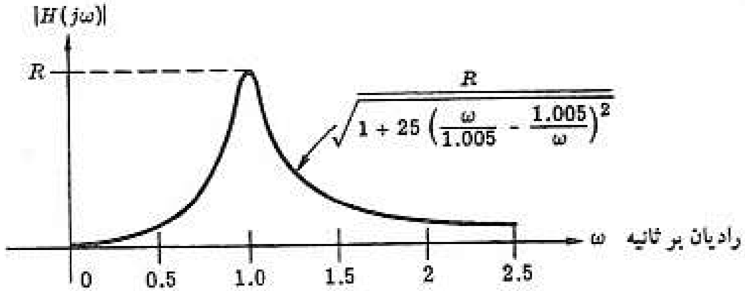
هر چه ω_d بزرگتر باشد، "فرکانس" پاسخ ضربه زیادتر خواهد بود.

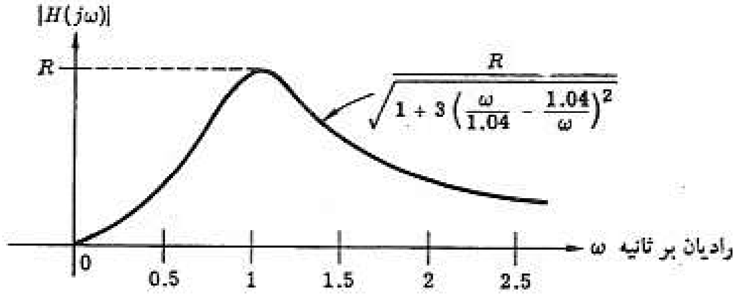
هر چه قطب به محور $j\omega$ نزدیکتر باشد، "نوک" منحنی اندازه، تیزتر خواهد بود.

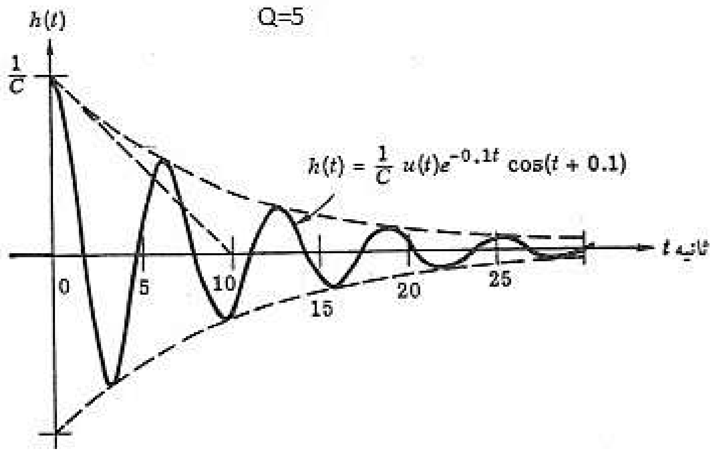
higher Q   peak value   more selective

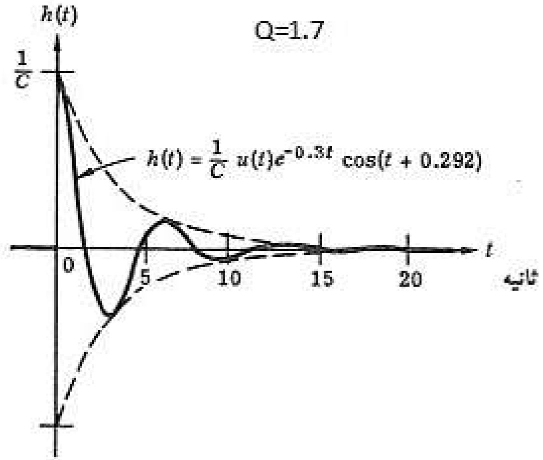












isolated poles

قطبهای مجزا شدهٔ نزدیک محور $j\omega$، موجب تشکیل نوکهای تیزی در منحنی اندازه می‌گردند.

W_d عرض یک قطب، محل تشکیل نوک و همچنین "فرکانس تقاطع" پاسخ ضربه با محور زمان را تعیین می‌کند.

7-6
98-2
ر. بیات

٤ – تعبیر فیزیکی قطبها و صفرها

تاکنون قطبها و صفرها را به منحنی‌های اندازه و فاز و همچنین به پاسخ ضربه ارتباط دادیم. اکنون می‌خواهیم تعبیر فیزیکی آنها را بیان کنیم. مثل گذشته، فرض می‌کنیم که شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان معلومی، با یک ورودی معین (مثل منبع جریان نابستهٔ i) و یک پاسخ حالت صفر مشخص (مثل ولتاژ v_L در دوسر یک جفت گره معین شده) داریم . فرض کنید $H(s)$ ، تابع شبکهٔ ارتباط دهندهٔ ورودی و پاسخ مزبور باشد. در این صورت:

$$H(s) = \frac{V_L(s)}{I(s)} = \frac{\mathfrak{L}[v_L(t)]}{\mathfrak{L}[i(t)]} \qquad \text{(۴-۱ الف)}$$

$$H(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)} \qquad \text{(۴-۱ ب)}$$

٤-١ قطبها

natural frequencies

poles

در این زیر بخش، می‌خواهیم یک رابطهٔ مهم میان قطبهای یک تابع شبکه و فرکانس‌های طبیعی متغیر شبکهٔ متناظر، به دست آوریم. در حقیقت، می‌خواهیم نشان دهیم که هر قطب تابع شبکه، یک فرکانس طبیعی متغیر شبکهٔ متناظر (خروجی) است. معادلهٔ (۴-۱ ب) نشان می‌دهد که p_1 یک قطب $H(s)$ می‌باشد؛ گفتهٔ بالا بیان می‌دارد که p_1 یک فرکانس طبیعی ولتاژ جفت گره v_L است.

برای اثبات ، فـرض کـنید کـه شـبکه در زمـان 0^- در حـالت صفر بـوده و جـریان ورودی آن $\delta(t)$ باشد. با توجه به اینکه $\mathfrak{L}[\delta] = 1$ می‌باشد، تبدیل لاپلاس ولتاژ خروجی چنین است:

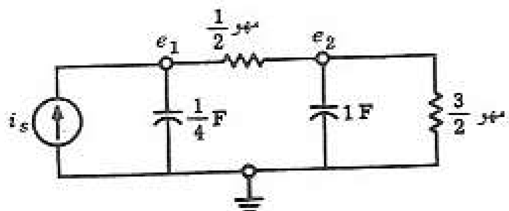
$$v_L(t) = \mathfrak{L}^{-1}[H(s)]$$

$$v_L(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i e^{p_i t}$$

اکنون ملاحظه کنید که برای $t > 0$ ورودی متحد با صفر است. بنابراین، برای $t > 0$ می‌توان شکل موج پاسخ $v_L(\cdot)$ را که به وسیلهٔ معادلهٔ (۴-۳) داده می‌شود، به عنوان پاسخ ورودی صفر در نظر گرفت. در حقیقت، می‌توان آن را به عنوان پاسخ ورودی صفر ناشی از حالتی که در زمان 0^+ ، شبکه در اثر ضربهٔ ورودی پیدا می‌کند، تعبیر نمود. از آنجایی که برای $t > 0$ معادلهٔ (۴-۳) عبارت پاسخ ورودی صفر را نشان می‌دهد و چون $K_1 \neq 0$ است، پس p_1 یک فرکانس طبیعی v_L می‌باشد.

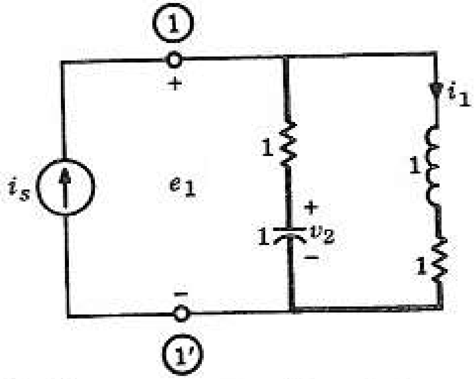
در حقیقت می‌توان نشان داد که اگر شبکه در زمان 0^- از حالت صفر شروع کرده و در فاصلهٔ زمانی $[0, T]$ به وسیلهٔ موج ورودی $i(\cdot)$ تحریک شود (با این شرط که برای $t > T$ ورودی i قطع گردد)، در این صورت ممکن است شکل موج ورودی را چنان انتخاب کرد که برای $t > T$ داشته باشیم $v_L(t) = Ke^{p_1 t}$ ، یعنی برای $t > T$ خروجی کاملاً نمایی باشد. در چنین وضعی گوییم که فرکانس طبیعی p_1 و تنها p_1 ، به وسیلهٔ این ورودی خاص تحریک شده است. این موضوع را به سادگی به کمک یک مثال روشن می‌کنیم.

مثال ۱ شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۴-۱) را در نظر بگیرید.



8-6
98-2
ر. بیات

مثال ۲ منظور از این مثال، نشان دادن این مطلب است که ممکن است ولتاژ جفت گره e_1 ، دارای فرکانس طبیعی s_1 باشد، اما امپدانس نقطهٔ تحریک دراین جفت گره، قطبی در s_1 نداشته باشد. شبکهٔ نشان داده شده در شکل (۴-۲) را در نظر بگیرید. برای نوشتن معادلات حالت، درختی انتخاب می‌کنیم که تمام خازن‌ها را شامل بوده و هیچ سلفی را در برنداشته باشد. درخت فوق درشکل نشان داده شده است. از نوشتن معادلهٔ حلقهٔ اساسی برای سلف و معادلهٔ کات‌ست اساسی برای خازن، به دست می‌آوریم:



شکل ٤-٢ امپدانس نقطهٔ تحریکی که در سرهای ① ①' دیده می‌شود، برای تمام s برابر ۱ اهم می‌باشد.

$$\begin{bmatrix} \dfrac{di_1}{dt} \\ \dfrac{dv_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ v_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} i_s$$

با در نظر گرفتن تبدیل لاپلاس این معادله، خواهیم داشت:

$$\begin{bmatrix} s+2 & -1 \\ 1 & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1(s) \\ V_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} I_s(s) + \begin{bmatrix} i_1(0^-) \\ v_2(0^-) \end{bmatrix} \qquad (4\text{-}4)$$

الف ـ اکنون پاسخ حالت صفر را حساب می‌کنیم. از قاعدهٔ کرامر خواهیم داشت:

$$I_1(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2} I_s(s) = \frac{1}{s+1} I_s(s) \qquad (4\text{-}5)$$

$$V_2(s) = \frac{s+1}{(s+1)^2} I_s(s) = \frac{1}{s+1} I_s(s) \qquad (4\text{-}6)$$

برای محاسبهٔ پاسخ حالت صفر e_1 ، ملاحظه می‌کنیم که:

$$e_1 = \frac{di_1}{dt} + i_1$$

$$E_1(s) = (s+1) I_1(s)$$

$$E_1(s) = \frac{s+1}{s+1} I_s(s) = I_s(s)$$

$$Z_1(s) = 1 \qquad \text{برای تمام } s$$

در اینجا یک حقیقت بسیار جالب را ملاحظه می‌کنیم و آن اینکه امپدانس نقطهٔ تحریکی که در سرهای ① ①' دیده می‌شود، برای تمام s برابر ۱ اهم است.

از لحاظ جبری این مطلب نتیجهٔ حذفها است

از لحاظ فیزیکی، در فرکانس‌های خیلی پایین
خازن مثل یک مدار باز است و تمام جریان از ترکیب RL می‌گذرد و به علت اینکه در فرکانس‌های پایین امپدانس سلف بسیار کم است، امپدانسی که در سرهای ① ①' دیده می‌شود، باید نزدیک ۱ اهم باشد.
در فرکانس‌های خیلی بالا، امپدانس خازن بسیار کم و امپدانس سلف بسیار زیاد است و مجدداً همان نتیجه حاصل می‌گردد.

9-6
98-2
ر. بیات

ب ـ اکنون پاسخ ورودی صفر را حساب می‌کنیم. در اینجا $I_s(s) = 0$ است. از به کار بردن قاعدهٔ کرامر در معادلهٔ (۴-۴)، به دست می‌آوریم:

$$I_1(s) = \frac{si_1(0^-) + v_2(0^-)}{(s+1)^2}$$

$$V_2(s) = \frac{-i_1(0^-) + (s+2)v_2(0^-)}{(s+1)^2}$$

با استفاده از گسترش به صورت کسرهای جزئی، به دست می‌آید:

$$i_1(t) = [-i_1(0^-) + v_2(0^-)]te^{-t} + i_1(0^-)e^{-t}$$

$$v_2(t) = [-i_1(0^-) + v_2(0^-)]te^{-t} + v_2(0^-)e^{-t}$$

ملاحظه می‌کنیم که متغیرهای شبکهٔ i_1 و v_2 ، دارای فرکانس طبیعی ۱- هستند.

اکنون e_1 را در نظر بگیرید. چون در مورد اخیر شبکه دارای حالت صفر نمی‌باشد، پس داریم: $E_1(s) = (s+1)I_1(s) - i_1(0^-)$

و در حقیقت:

$$E_1(s) = \frac{-i_1(0^-) + v_2(0^-)}{s+1}$$

بدین ترتیب، پاسخ ورودی صفر چنین است: $e_1(t) = [-i_1(0^-) + v_2(0^-)]e^{-t}$

بنابراین، ۱- فرکانس طبیعی e_1 می‌باشد.

اکنون حقیقت زیر را تأکید می‌کنیم که با وجود اینکه ۱- فرکانس طبیعی e_1 می‌باشد، ولی قطب $Z_1(s)$ نیست. این مطلب نباید قضیه‌ای نادرست به نظر برسد، زیرا فرکانس‌های طبیعی، خواص پاسخهای ورودی صفر هستند (یعنی پاسخ حالتهای اولیهٔ اختیاری)، در حالی که تابع شبکه تنها پاسخهای حالت صفر را پیش بینی می‌کند.

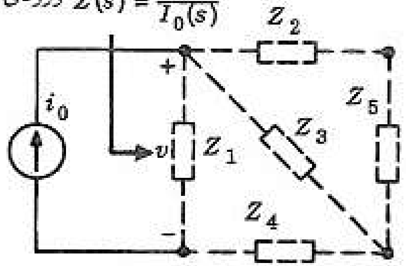
به طور خلاصه، بیان می‌کنیم که هر قطب یک تابع شبکه، یک فرکانس طبیعی متغیر شبکهٔ متناظر (خروجی) است. اما لزومی ندارد که هر فرکانس طبیعی یک متغیر شبکه، یک قطب تابع شبکهٔ معلومی باشد که این متغیر شبکه به عنوان خروجی آن می‌باشد.

10-6
98-2
ر. بیات

۲-۴ فرکانس‌های طبیعی یک شبکه

از آنجاکه فرکانس‌های طبیعی یک شبکه تنها به توپولوژی شبکه و مقادیر اجزای آن بستگی داشته و به ورودی شبکه وابسته نمی‌باشند، پس هنگامی که فرکانس‌های طبیعی یک شبکه مورد نظر هستند، تمام منابع نابسته را مساوی صفر قرار می‌دهیم. توجه کنید وقتی که منبع ولتاژی را برابر صفر قرار می‌دهیم، آن را با یک مدار اتصال کوتاه و هنگامی که منبع جریانی را برابر صفر قرار می‌دهیم، آن را با یک مدار باز تعویض می‌کنیم. برای مشخص کردن شبکه‌ای که از صفر قرار دادن تمام منابع نابستهٔ یک شبکهٔ داده شده به دست می‌آید، واژهٔ **شبکهٔ بی‌تحریک** را به کار می‌بریم.

ورودی لحیم شده $Z(s) = \dfrac{V(s)}{I_0(s)}$

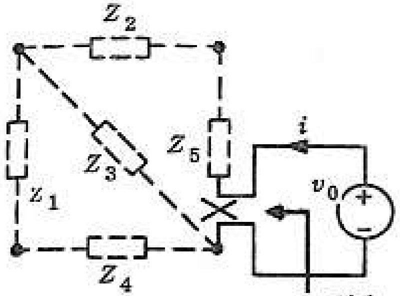


اکنون بررسی خود را با یک شبکهٔ بی‌تحریک، آغاز می‌کنیم. برای معرفی توابع شبکهٔ مختلف، می‌توان منابع نابستهٔ مناسبی را به کار برد. به عنوان مثال، اگر منبع جریان نابستهٔ $i_\circ$ را به شبکهٔ بی‌تحریک نشان داده شده در شکل (۴-۳ الف) اعمال کنیم، امپدانس نقطهٔ تحریک Z که به وسیلهٔ منبع جریان دیده می‌شود، چنین تعریف می‌گردد:

$$Z(s) = \frac{V(s)}{I_\circ(s)} = \frac{\mathfrak{L}[v(t)]}{\mathfrak{L}[i_\circ(t)]}$$

قطبهای $Z(s)$ فرکانس‌های طبیعی متغیر v می‌باشند و از این‌رو فرکانس‌های طبیعی شبکه نیز هستند.

> توجه کنید که در به کار بردن منبع جریان، ما دوسر منبع را به دو گرهٔ شبکهٔ بی‌تحریک وصل می‌کنیم و بدین‌ترتیب هنگامی که با باز کردن این اتصال منبع جریان را برابر صفر قرار می‌دهیم، شبکهٔ بی‌تحریک اولیه را باز می‌یابیم. یعنی، به کار بردن منبع جریان، توپولوژی و مقادیر اجزای شبکهٔ بی‌تحریک را تغییر نمی‌دهد و بنابراین تغییری در رفتار طبیعی شبکه به‌وجود نمی‌آورد.



ورودی بریده شده $Y(s) = \dfrac{I(s)}{V_0(s)}$

اگر منبع ولتاژ نابستهٔ $v_\circ$ را مطابق شکل (۴-۳ ب) به شبکهٔ اصلی وصل کنیم، ادمیتانس نقطهٔ تحریک Y که به وسیلهٔ منبع ولتاژ دیده می‌شود، چنین تعریف

$$Y(s) = \frac{I(s)}{V_\circ(s)} = \frac{\mathfrak{L}[i(t)]}{\mathfrak{L}[v_\circ(t)]}$$

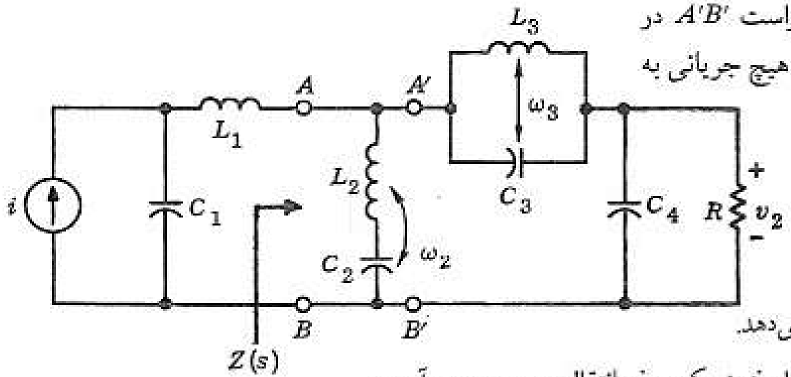
قطبهای $Y(s)$ فرکانس‌های طبیعی متغیر i می‌باشند و از این‌رو فرکانس‌های طبیعی شبکه نیز هستند. توجه کنید که در به کار بردن منبع ولتاژ، ما یک شاخه از شبکهٔ بی‌تحریک را قطع کرده و منبع ولتاژ را در آنجا قرار می‌دهیم. دوباره، وقتی که با اتصال کوتاه کردن این قسمت، منبع ولتاژ را برابر صفر قرار می‌دهیم، شبکهٔ بی‌تحریک اولیه را باز می‌یابیم. برای تأکید دو راه مختلف اعمال منابع نابسته به یک شبکهٔ بی‌تحریک دلخواه، اصطلاحات توصیفی ورودی لحیم شده و ورودی بریده شدهٔ زیر را معرفی می‌کنیم: منظور از **ورودی لحیم شده** آن است که از طریق وصل کردن دوسر یک منبع به دو گره دلخواه یک شبکه، داخل شبکه شویم. منظور از **ورودی بریده شده** آن است که از طریق بریدن یک شاخهٔ دلخواه شبکه و وصل کردن دوسر یک منبع به دو سری که از بریدن آن شاخه به‌وجود می‌آید، داخل شبکه شویم. واضح است که ما منبع جریان را تنها از راه ورودی لحیم شده و منبع ولتاژ را تنها از راه **ورودی** بریده شده اعمال می‌کنیم و بدین طریق، رفتار طبیعی شبکهٔ بی‌تحریک را حفظ می‌کنیم.

11-6
98-2
ر. بیات

نشان داده‌ایم که دستهٔ فرکانس‌های طبیعی یک شبکه، تمام قطبهای امپدانس‌ها و ادمیتانس‌های نقطهٔ تحریکی را که به طور مناسبی در یک شبکه تعریف می‌گردند، شامل می‌شود. در حقیقت می‌توان نشان داد که ممکن است که همهٔ فرکانس‌های طبیعی یک شبکه را از طریق محاسبهٔ قطبهای تمام توابع امپدانس و ادمیتانس شبکه نیز به دست آورد. این حقیقت را باید به این مطلب ارتباط داد که تمام فرکانس‌های طبیعی (غیرصفر) شبکه را می‌توان از طریق محاسبهٔ صفرهای دترمینان شبکه نیز به دست آورد.

۴-۳ صفرها

برای تعبیر معنی فیزیکی صفر تابع شبکه، از حالت ساده‌ای آغاز می‌کنیم. شبکهٔ نردبانی نشان داده شده در شکل (۴-۴) را در نظر بگیرید. این شبکه به وسیلهٔ یک منبع جریان تحریک می‌شود و $v_۲$ پاسخ حالت صفر آن است. فرض کنید مدار تطبیق شدهٔ سری $L_۲C_۲$ در فرکانس $\omega_۲$ و مدار تطبیق شدهٔ موازی $L_۳C_۳$ در فرکانس $\omega_۳$ به حالت تشدید باشند. ما بیان می‌کنیم که تابع شبکهٔ $H(s) = \dfrac{V_۲(s)}{I(s)}$ که پاسخ $v_۲$ را به ورودی i ارتباط می‌دهد، دارای یک صفر در $s = j\omega_۲$ و یک صفر دیگر در $s = j\omega_۳$ می‌باشد . در حقیقت فرض کنید که در فرکانس $\omega_۲$ ، شبکه در حالت دایمی سینوسی باشد. در این صورت مدار تشدید سری $L_۲C_۲$ در این فرکانس، دارای امپدانس صفر می‌باشد. یعنی در حالت دایمی سینوسی در فرکانس $\omega_۲$ ، ولتاژ دوسر AB صفر است. به علاوه، به علت اینکه امپدانس سمت راست $A'B'$ در فرکانس $\omega_۲$ صفر نیست، تمام جریان از درون مدار تطبیق شدهٔ سری $L_۲C_۲$ می‌گذرد و هیچ جریانی به مقاومت R نخواهد رسید و بنابراین $v_۲$ نیز صفر است.



$$\hat{V}_۲ = H(j\omega_۲)\hat{I} = ۰$$

نتیجه می‌شود که:

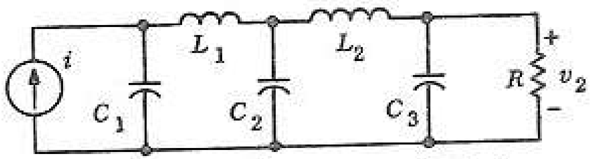
$$H(j\omega_۲) = ۰$$

استدلال بالا ایدهٔ فوق‌العاده مهمی را که در طرح صافی‌ها جنبهٔ اساسی دارد به ما نشان می‌دهد.

یک مدار تشدید موازی که در بازوی سری یک شبکهٔ نردبانی قرار دارد، در فرکانس تشدید خود یک صفر انتقال به وجود می‌آورد؛ همچنین یک مدار تشدید سری که در بازوی موازی یک شبکهٔ نردبانی قرار دارد، در فرکانس تشدید خود یک صفر انتقال به‌وجود می‌آورد.

فیلتر پایین گذر

در جریان مستقیم ($\omega = ۰$)، تمام جریان از طریق سلف‌ها مستقیماً به مقاومت بار R خواهد رفت و هیچ جریانی از خازن‌ها "نَشت نمی‌کند"، زیرا در $\omega = ۰$ امپدانس خازن‌ها بی‌نهایت و امپدانس سلف‌ها صفر است.



صافی پایین‌گذری که تابع شبکهٔ آن صفرهای پایاندار ندارد.

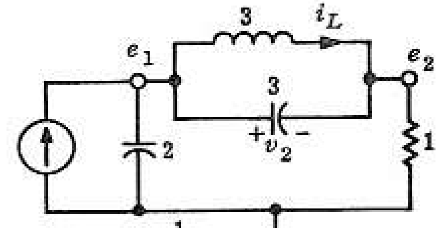
تمرین به طور حسی نشان دهید $H(s) = \dfrac{V_۲}{I} = \dfrac{K}{s^n + a_۱ s^{n-۱} + \cdots + a_n}$

تمرین یک توضیح حسی برای نشان دادن این حقیقت که شبکهٔ نردبانی ساخته شده از خازن‌های سری و سلف‌های موازی را یک صافی بالاگذر می‌نامند، بیان کنید.

12-6
98-2
ر. بیات

چنانچه این استدلال را کمی تعمیم دهیم، ملاحظه می‌کنیم که اگر یک صفر تابع شبکه در روی محور $j\omega$ باشد، می‌توان آن را چنین تعبیر نمود که در حالت دایمی سینوسی در آن فرکانس، پاسخ شبکه متحد با صفر است.

می‌توان ثابت کرد که اگر z_1 یک صفر دلخواه تابع شبکهٔ $H(s)$ بوده (لزومی ندارد که z_1 روی محور $j\omega$ قرار بگیرد) و اگر ورودی به صورت $u(t)e^{z_1 t}$ باشد، در این صورت حالت اولیه‌ای را می توان پیدا کرد به قسمی که پاسخ کامل (ناشی از این حالت اولیه و ورودی نمایی) به طور متحد برابر صفر گردد.


$i(t) = u(t)\cos\frac{1}{3}t$

تمرین شبکهٔ نردبانی نشان داده شده شکل (۴-۶) را در نظر بگیرید. از آنجا که مدار تطبیق شدهٔ موازی در فرکانس $\omega = \frac{1}{3}$ رادیان بر ثانیه به حالت تشدید است، تابع شبکهٔ $H(s) = \frac{E_2(s)}{I(s)}$ در $\omega = \frac{1}{3}$ دارای یک صفر است. نشان دهید که اگر $e_1(0) = v_2(0) = 0$ و $i_L(0) = -\frac{3}{2}$ باشند، پاسخ ناشی از ورودی $i(t) = u(t)\cos\left(\frac{t}{3}\right)$ آمپر، برای تمام $t \geq 0$، به صورت $e_1(t) = \frac{3}{2}\sin\left(\frac{t}{3}\right)$ و $e_2(t) = 0$ است.

۵- کاربرد در طراحی نوسان‌ساز

۶- خواص تقارن

اکنون به رفتار تابع شبکه در روی محور $j\omega$ برمی‌گردیم.

$$H(s) = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1}s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1}s + a_n}$$

که در آن ضرایب a_0، a_1، ...، a_n، b_0، b_1، ...، b_m اعداد حقیقی هستند. برای اینکه H را در فرکانس ω محاسبه کنیم، در رابطهٔ (۱-۶)، $s = j\omega$ قرار داده و جملات را به صورت زیر دسته‌بندی می‌کنیم:

$$H(j\omega) = \frac{(b_m - b_{m-2}\omega^2 + b_{m-4}\omega^4 + \cdots) + j\omega(b_{m-1} - b_{m-3}\omega^2 + \cdots)}{(a_n - a_{n-2}\omega^2 + a_{n-4}\omega^4 + \cdots) + j\omega(a_{n-1} - a_{n-3}\omega^2 + \cdots)}$$

ملاحظهٔ اینکه $H(j\omega)$ به صورت زیر است، حائز اهمیت می‌باشد:

$$H(j\omega) = \frac{[\text{چندجمله‌ای از } \omega^2] + j\omega[\text{چندجمله‌ای از } \omega^2]}{[\text{چندجمله‌ای از } \omega^2] + j\omega[\text{چندجمله‌ای از } \omega^2]}$$

چون تمام ضرایب چندجمله‌ای‌های فوق حقیقی هستند، صورت و مخرج صورت جزءهای حقیقی و انگاری خود تفکیک می‌گردند.

$$\overline{H(j\omega)} = \frac{[\text{چندجمله‌ای از } \omega^2] - j\omega[\text{چندجمله‌ای از } \omega^2]}{[\text{چندجمله‌ای از } \omega^2] - j\omega[\text{چندجمله‌ای از } \omega^2]}$$

$$\overline{H(j\omega)} = H(-j\omega) \qquad \mathrm{Re}\,[\overline{H(j\omega)}] = \mathrm{Re}\,[H(j\omega)] \qquad |\overline{H(j\omega)}| = |H(j\omega)|$$

$$\mathrm{Im}\,[\overline{H(j\omega)}] = -\,\mathrm{Im}\,[H(j\omega)] \qquad \sphericalangle\overline{H(j\omega)} = -\sphericalangle H(j\omega)$$

$$\boxed{\begin{array}{ll} \mathrm{Re}\,[H(j\omega)] = \mathrm{Re}\,[H(-j\omega)] & |H(j\omega)| = |H(-j\omega)| \\ \mathrm{Im}\,[H(j\omega)] = -\,\mathrm{Im}\,[H(-j\omega)] & \sphericalangle H(j\omega) = -\sphericalangle H(-j\omega) \end{array}}$$

نتایج مهم: $\mathrm{Re}\,[H(j\omega)]$ و $|H(j\omega)|$ توابع زوجی از ω
و $\mathrm{Im}\,[H(j\omega)]$ و $\sphericalangle H(j\omega)$ توابع فردی از ω می‌باشند.

بیان فوق، به یک نتیجهٔ مهم عملی منجر می‌گردد و آن اینکه، برای نشان دادن پاسخ شبکه تنها لازم است که $\mathrm{Re}\,[H(j\omega)]$ و $\mathrm{Im}\,[H(j\omega)]$ یا $|H(j\omega)|$ و $\sphericalangle H(j\omega)$ برای $\omega \geq 0$ رسم شوند.

تمرین خواص تقارن داده شده توسط معادلهٔ (۶-۶) را از روی رابطهٔ $H(s) = \int_{0^-}^{\infty} h(t)e^{-st}\,dt$ به دست آورید.