ر. بیات

تبدیلهای لاپلاس

تبدیل لاپلاس (با فامیل نزدیکش، تبدیل فوریه) یک وسیلهٔ اساسی برای مطالعهٔ سیستم‌های خطی تغییرناپذیر با زمان است.

در مورد شبکه‌های تغییرپذیر با زمان و / یا غیرخطی، تقریباً بی‌فایده است.

۱- تعریف

$$F(s) = \mathfrak{L}[f(t)] = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}dt \qquad f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[F(s)] = \int_{-\infty}^{\infty} F(s)e^{st}ds$$

$$f(t) = u(t) \qquad \int_{0^-}^{\infty} u(t)e^{-st}dt = \int_{0^-}^{\infty} e^{-st}dt \qquad \mathfrak{L}[u(t)] = \frac{1}{s} \qquad \mathfrak{L}[e^{at}u(t)] = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathfrak{L}[\delta(t)] = 1$$

۲- خواص

۲-۱ یکتایی

۲-۲ خطی بودن

f_1 و f_2 دو تابع زمانی دلخواه و c_1 و c_2 دو ثابت اختیاری

$$\mathfrak{L}[c_1f_1(t) + c_2f_2(t)] = c_1\mathfrak{L}[f_1(t)] + c_2\mathfrak{L}[f_2(t)]$$

$$\mathfrak{L}[\cos\beta t] = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{2}e^{j\beta t} + \frac{1}{2}e^{-j\beta t}\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{s-j\beta} + \frac{1}{2}\frac{1}{s+j\beta} = \frac{s}{s^2+\beta^2} \qquad \mathfrak{L}[e^{\alpha t}\cos\beta t] = \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

$$\mathfrak{L}[\sin\beta t] = \mathfrak{L}\left[\frac{1}{2j}e^{j\beta t} - \frac{1}{2j}e^{-j\beta t}\right] = \frac{\beta}{s^2+\beta^2} \qquad \mathfrak{L}[e^{\alpha t}\sin\beta t] = \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$$

۲-۳ قاعدهٔ مشتق‌گیری

$$\mathfrak{L}\left[\frac{df}{dt}\right] = s\mathfrak{L}[f(t)] - f(0^-)$$

کاربرد مکرر قضیهٔ مشتق‌گیری

$$\mathfrak{L}[f^{(2)}(t)] = s^2\mathfrak{L}[f(t)] - sf(0^-) - f^{(1)}(0^-)$$

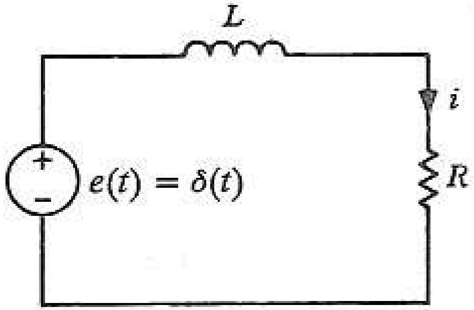
$$\mathfrak{L}[f^{(3)}(t)] = s^3\mathfrak{L}[f(t)] - s^2f(0^-) - sf^{(1)}(0^-) - f^{(2)}(0^-)$$

و به طور کلی

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(t)] = s^n\mathfrak{L}[f(t)] - s^{n-1}f(0^-) - \cdots - sf^{(n-2)}(0^-) - f^{(n-1)}(0^-)$$

مثال پاسخ ضربهٔ مدار خطی تغییرناپذیر با زمان ، e ورودی و i پاسخ

$i(0^-) = 0$ است، زیرا مدار پیش از اعمال ضربه در حالت صفر



h پاسخ ضربه

معادلهٔ دیفرانسیل مدار $\quad h(0^-) = 0 \quad L\dfrac{dh}{dt} + Rh = \delta(t)$

تبدیل لاپلاس دو طرف

$$\mathcal{L}\left[L\frac{dh}{dt} + Rh\right] = \mathcal{L}[\delta(t)] = 1$$

از خاصیت خطی بودن (با توجه به اینکه R و L ثابت هستند)

$$L\mathcal{L}\left[\frac{dh}{dt}\right] + R\mathcal{L}[h] = 1$$

با به کار بردن قاعدهٔ مشتق‌گیری و شرط اولیه

$$(Ls + R)\mathcal{L}[h(t)] = 1$$

زیرا $h(0^-) = 0$. بنابراین:

$$\mathcal{L}[h(t)] = \frac{1}{Ls + R} = \frac{1}{L}\frac{1}{s + \frac{R}{L}}$$

و از این‌رو:

$$h(t) = \frac{1}{L}u(t)e^{-\left(\frac{R}{L}\right)t}$$

۴-۲ قاعدهٔ انتگرال‌گیری

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(t')\,dt'\right] = \frac{1}{s}\mathcal{L}[f(t)]$$

۳-۲ گسترش به صورت کسرهای جزئی

برای تجزیهٔ هر تابع گویا به جزءهای ساده، یک روش عمومی وجود دارد ، گسترش به صورت کسرهای جزئی

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\frac{b_0 s^m+b_1 s^{m-1}+\cdots+b_{m-1}s+b_m}{a_0 s^n+a_1 s^{n-1}+\cdots+a_{n-1}s+a_n}$$

$P(s)$ و $Q(s)$ ، چندجمله‌ای‌هایی برحسب متغیر فرکانس مختلط s ضرایب حقیقی

طرز نمایش دیگر $F(s)$ به صورت تجزیه به عوامل:

$$F(s)=K\frac{\prod_{i=1}^{m}(s-z_i)}{\prod_{j=1}^{n}(s-p_j)}$$

z_i صفرها
p_j قطبها

اولین گام در گسترش به صورت کسرهای جزئی، نوشتن تابع گویا به یک صورت مناسب است.
یک تابع گویا را مناسب گویند اگر درجهٔ چندجمله‌ای صورت از درجهٔ چندجمله‌ای مخرج، کمتر باشد.
چنانچه تابع گویای داده شده به صورت $F(s)$ ، مناسب نباشد، یعنی درجهٔ $P(s)$ بزرگتر یا مساوی درجهٔ $Q(s)$ گردد، $P(s)$ را به $Q(s)$ تقسیم کرده و به دست می‌آوریم:

$$F(s)=\frac{P(s)}{Q(s)}=\hat{P}(s)+\frac{R(s)}{Q(s)}$$

خارج‌قسمت $\hat{P}(s)$ ، در رابطهٔ (۳-۱۰) به صورت یک چندجمله‌ای بوده و $R(s)$ باقیماندهٔ تقسیم است. بنابراین درجهٔ $R(s)$ از درجهٔ $Q(s)$ کمتر بوده و تابع گویای جدید $\frac{R(s)}{Q(s)}$ به صورت مناسب است . از آنجا که $\hat{P}(s)$ یک چندجمله‌ای است، تابع زمانی متناظر با آن ترکیبی از δ، $\delta^{(1)}$ ، ...

حالت ۱: قطب‌های ساده مثال

$$F(s) = \frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{s^{۲} + ۳s + ۵}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}$$

ثابت‌هایی مانند $K_۱$ ، $K_۲$ و $K_۳$ وجود دارند که

$$\frac{s^{۲} + ۳s + ۵}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)} = \frac{K_۱}{s+۱} + \frac{K_۲}{s+۲} + \frac{K_۳}{s+۳}$$

$$K_۱ = \left.\frac{s^{۲} + ۳s + ۵}{(s+۲)(s+۳)}\right|_{s=-۱} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

$$K_۲ = \left.\frac{s^{۲} + ۳s + ۵}{(s+۱)(s+۳)}\right|_{s=-۲} = \frac{۳}{-۱} = -۳$$

$$K_۳ = \left.\frac{s^{۲} + ۳s + ۵}{(s+۱)(s+۲)}\right|_{s=-۳} = \frac{۵}{۲} = ۲/۵$$

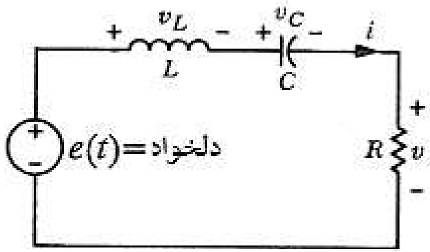
در نتیجه:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{s^{۲} + ۳s + ۵}{(s+۱)(s+۲)(s+۳)}\right]$$

$$= \mathcal{L}^{-۱}\left[\frac{۱/۵}{s+۱} + \frac{-۳}{s+۲} + \frac{۲/۵}{s+۳}\right]$$

$$= ۱/۵\, e^{-t} - ۳e^{-۲t} + ۲/۵\, e^{-۳t} \qquad \text{برای } t \geq ۰$$

۳-۳ پاسخ حالت صفر



$$\left(\frac{L}{R}s + 1 + \frac{1}{RCs}\right)V(s) = E(s)$$

$$V(s) = \left[\frac{R}{L}\,\frac{s}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}}\right]E(s)$$

$$V(s) = H(s)E(s)$$

(تبدیل لاپلاس ورودی) (تابع شبکه) = (تبدیل لاپلاس پاسخ حالت صفر)

از آنجا که تبدیل لاپلاس تابع ضربهٔ واحد، برابر ۱ است:

$$\boxed{\mathfrak{L}\,[h(t)] = H(s)}$$

۴-۳ قضیهٔ کانولوشن

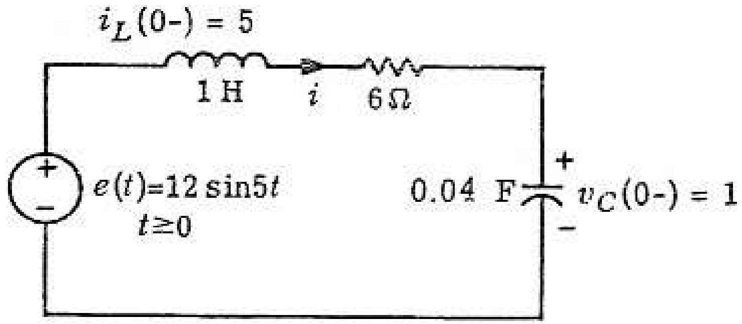
$$f_3(t) \triangleq \int_{0^-}^{t^+} f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$$

در این صورت:

$$F_3(s) = F_1(s)F_2(s)$$

6 - 4
98-2
ر. بیات

می‌خواهیم جریان i را برای $v_C(\circ^-) = ۱\ V$ و $i_L(\circ^-) = ۵\ A$ و $e(t) = ۱۲ \sin ۵t$ حساب کنیم.



برای $t \geq \circ$
$$L\frac{di}{dt} + Ri + \frac{۱}{C}\int_{\circ^-}^{t} i(t')dt' + v_C(\circ^-) = e(t)$$

تبدیل لاپلاس

$$\frac{L}{s}\left(s^۲ + \frac{R}{L}s + \frac{۱}{LC}\right)I(s) = E(s) + Li_L(\circ^-) - \frac{v_C(\circ^-)}{s}$$

$$I(s) = \frac{s}{(s+۳)^۲ + ۴^۲}E(s) + \frac{۵s - ۱}{(s+۳)^۲ + ۴^۲}$$

$$\underbrace{I(s)}_{\substack{\text{تبدیل لاپلاس} \\ \text{پاسخ کامل}}} = \underbrace{I_\circ(s)}_{\substack{\text{تبدیل لاپلاس} \\ \text{پاسخ حالت صفر}}} + \underbrace{I_i(s)}_{\substack{\text{تبدیل لاپلاس} \\ \text{پاسخ ورودی صفر}}}$$

$$E(s) = \frac{۶\circ}{s^۲ + ۵^۲}$$

$$I_\circ(s) = \frac{۶\circ s}{[(s+۳)^۲ + ۴^۲](s^۲ + ۵^۲)}$$

تبدیل لاپلاس معکوس

$$i_\circ(t) = \mathcal{L}^{-۱}[I_\circ(s)] = ۲/۵\, e^{-۳t}\cos(۴t + ۹\circ^\circ) + ۲\cos(۵t - ۹\circ^\circ)$$

$$= -۲/۵\, e^{-۳t}\sin ۴t + ۲\sin ۵t \quad t \geq \circ$$

$$I_i(s) = \frac{5s-1}{(s+3)^2+4^2}$$

تبدیل لاپلاس معکوس پاسخ ورودی صفر :

$$i_i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I_i(s)] = 5\,e^{-3t}\cos 4t - 4e^{-3t}\sin 4t \qquad t \geq 0$$

پاسخ کامل :

$$i(t) = i_0(t) + i_i(t)$$
$$= 5\,e^{-3t}\cos 4t - 6/5\,e^{-3t}\sin 4t + 2\sin 5t \qquad t \geq 0$$

آخرین جملهٔ سمت راست، پاسخ حالت دایمی سینوسی بوده و جملات دیگر، پاسخ گذرا .

پاسخ گذرا، هم معلول شرایط اولیه و هم معلول اعمال ناگهانی ورودی سینوسی $12\sin 5t$ است .

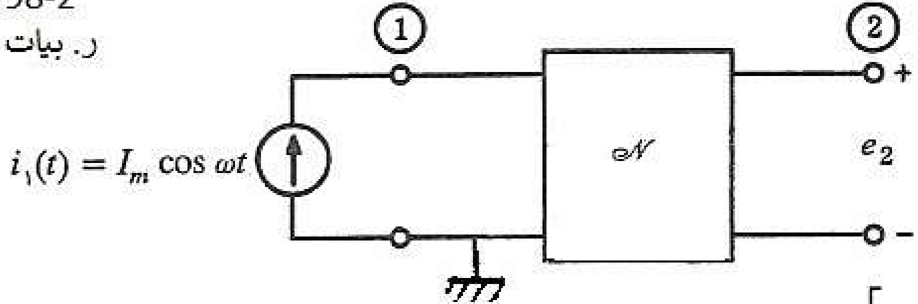
٤ - حل شبکه‌های کلی

$$\mathbf{Y}_n(D)\,\mathbf{e} = \mathbf{i}$$

تبدیل لاپلاس :

$$\mathbf{Y}_n(s)\mathbf{E}(s) = \mathbf{I}(s) + \mathbf{a} = \mathbf{F}(s)$$

$$\mathbf{E}(s) = \mathbf{Y}_n^{-1}(s)\mathbf{F}(s)$$



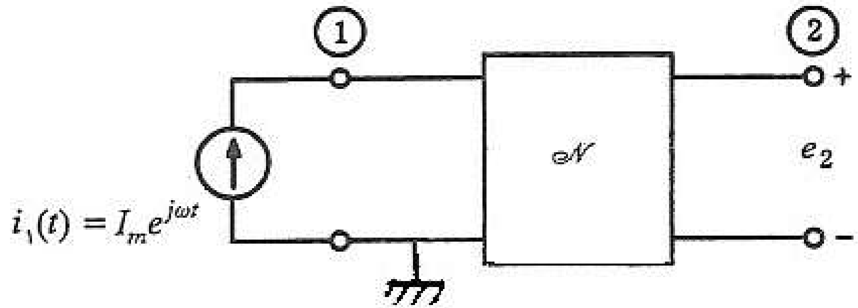
پاسخ حالت دایمی سینوسی:

معادلات گره:

$$\begin{bmatrix} & & \\ & Y_n(j\omega) & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_2 = H(j\omega)\, I_1$$

$$e_2(t) = \mathrm{Re}\,[H(j\omega) I_m e^{j\omega t}] = |H(j\omega)| I_m \cos[\omega t + \measuredangle H(j\omega)]$$



$$\begin{bmatrix} & & \\ & Y_n(s) & \\ & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{1e}(s) \\ E_{2e}(s) \\ \vdots \\ E_{ne}(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{I_m}{s - j\omega} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$E_{2e}(s) = H(s) \frac{I_m}{s - j\omega}$$

$$E_{2e}(s) = H(s)\,\frac{I_m}{s - j\omega}$$

فرض کنیم تمام قطب‌های $H(s)$ در نیم صفحهٔ باز چپ باشند [یعنی $\mathrm{Re}(p_j) < 0$ برای $j = 1, 2, \cdots$ ، که در اینجا p_j قطب‌های $H(s)$ هستند]. گسترش به صورت کسرهای جزئی (۴−۱۹) شامل جملاتی است که می‌توانند در دو دسته گروه‌بندی شوند. دستهٔ اول جملاتی به صورت $\dfrac{K_j}{s - p_j}$

دستهٔ دوم، تک جمله $\dfrac{K}{s-j\omega} = \dfrac{H(j\omega)I_m}{s - j\omega}$

برای تمام j ، $\mathrm{Re}(p_j) < 0$ است، در این صورت وقتی $t \to \infty$ ، برای تمام j ، توابع زمانی متناظر با جملات دستهٔ اول، به طور نمایی به سمت صفر میل می‌کنند. بنابراین پاسخ e_{2e} ، به سمت تابع زمانی متناظر با تک جمله میل می‌کند

$$e_{2e}(t) = \mathcal{L}^{-1}[E_{2e}(s)]$$
$$\approx H(j\omega)I_m e^{j\omega t}$$

برای به دست آوردن پاسخ $e_2(t)$ ناشی از $i_1(t) = I_m \cos \omega t$ ، جزء حقیقی عبارت بالا

$$e_2(t) \approx |H(j\omega)|\,I_m \cos[\omega t + \measuredangle H(j\omega)]$$

این پاسخ در بالا با تحلیل دائمی سینوسی به دست آمد.

جمع بندی

۱ـ اگر تمام قطب‌های $H(s)$ دارای جزءهای حقیقی منفی باشند، پاسخ حالت صفر ناشی از $I_m \cos \omega t$ به سمت پاسخ حالت دایمی سینوسی $|H(j\omega)|\,I_m \cos[\omega t + \measuredangle H(j\omega)]$ میل می‌کند.

۲ـ هنگامی که تابع شبکهٔ $H(s)$ را در $s = j\omega$ محاسبه می‌کنیم، نتیجهٔ به دست آمده نسبت فازور خروجی به فازور ورودی در حالت دایمی سینوسی در فرکانس ω می‌باشد.

تبصره نتیجهٔ اخیر بسیار مهم است زیرا این نتیجه، تابع شبکه را به کمیت‌هایی که به سادگی قابل سنجش می‌باشند (دامنه و فاز نسبی ورودی و خروجی سینوسی) مربوط می‌سازد. بنابراین، اگر به عنوان مثال چیزی در مورد توپولوژی و مقادیر عناصر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان معلوم نبوده و تنها ورودی و خروجی قابل سنجش باشند، بازهم می‌توان تابع شبکه را به طور تجربی تعیین کرد.