1-5
98-2
ر. بیات

فرکانس‌های طبیعی

۱-۵ فرکانس طبیعی یک متغیر شبکه

شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان $\mathcal{N}$ را در نظر بگیرید.   منابع نابستهٔ شبکه برابر صفر

یکی از متغیرهای شبکهٔ $\mathcal{N}$ که ممکن است ولتاژ یک شاخه، ولتاژ یک گره، جریان یک شاخه یا جریان یک حلقه باشد.

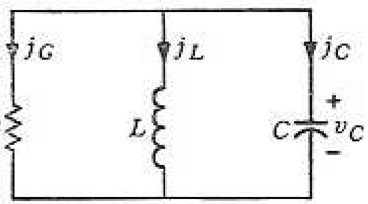
$$x(t) = K_1 e^{s_1 t} + K_2 e^{s_2 t} + \cdots \quad t \geq 0$$

K_i ها و s_i ها مقادیر ثابت (احتمالاً مختلط)

s_i ها به توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه بستگی دارند.

K_i ها علاوه بر توپولوژی و مقادیر اجزای شبکه، به حالت اولیه نیز وابسته می‌باشند.

چنانچه برای بعضی از حالت‌های اولیه $K_1 e^{s_1 t}$ در پاسخ ورودی صفر x ظاهر شود s_1 **یک فرکانس** طبیعی x



مثال مدار RLC موازی $C = 1$ ، $R = \frac{1}{6}\Omega$ و $L = \frac{1}{25}H$

$$C\dot{v}_C + Gv_C + \frac{1}{L}\int_0^t v_C(t')\,dt' + j_L(0^-) = 0 \qquad (3)$$

$$\left(Cs + G + \frac{1}{Ls}\right)V_C(s) = Cv_C(0^-) - \frac{1}{s}j_L(0^-)$$

$$V_C(s) = \frac{sCv_C(0^-) - j_L(0^-)}{Cs^2 + Gs + \frac{1}{L}}$$

$$= \frac{sv_C(0^-) - j_L(0^-)}{(s+3)^2 + 4^2} \qquad (4)$$

با گسترش به صورت کسرهای جزئی

$$v_C(t) = \frac{(-3+j4)v_C(0^-) - j_L(0^-)}{j8}e^{(-3+j4)t} + \frac{(-3-j4)v_C(0^-) - j_L(0^-)}{-j8}e^{(-3-j4)t}$$

$-3+j4$ و $-3-j4$ فرکانس‌های طبیعی v_C

* j_L ، v_L ، j_G ، v_G ، j_C و v_C فرکانس‌های طبیعی یکسان دارند.

2-5
98-2

برای متغیر x شبکهٔ $\mathcal{N}$ ، معادلهٔ دیفرانسیل $Q(D)x = 0$

معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال هر پاسخ ورودی صفر x آن‌را برمی‌آورد و هر جواب‌آن ، پاسخ ورودی صفر x متناظر با حالت اولیهٔ معینی از $\mathcal{N}$ است. ر. **بیات**
هیچ معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ کوچکتری نمی‌تواند خاصیت فوق را داشته باشد.

فرض کنید این معادلهٔ دیفرانسیل داده شده. در این صورت :
s_1 یک فرکانس طبیعی x است اگر و تنها اگر s_1 یکی از صفرهای چند جمله‌ای $Q(s)$ باشد [یعنی اگر و تنها اگر $Q(s_1)$ مساوی صفر باشد].

چنانچه s_1 یک صفر مرتبهٔ mام چند جمله‌ای $Q(s)$ باشد،
در این صورت s_1 را یک **فرکانس طبیعی از مرتبهٔ** m متغیر شبکهٔ x نامند.

مثال فرض کنید متغیر شبکه ولتاژ شاخهٔ v بوده و معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال آن

$$(D^5 + 2D^4 + 2D^3 + 2D^2 + D)\,v = 0$$

یا:

$$(D^2 + 1)(D + 1)^2 D v = 0$$

در نتیجه پاسخ ورودی صفر v

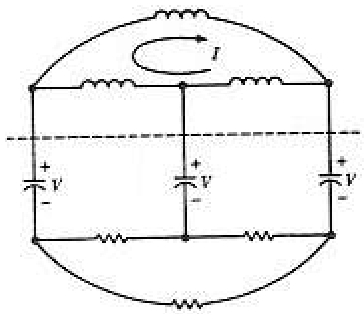
$$v(t) = K_1 e^{jt} + K_2 e^{-jt} + (K_3 + K_4 t)e^{-t} + K_5$$

فرکانس‌های طبیعی v

$$s_3 = s_4 = -1 \text{ و } s_2 = -j1 \text{ ، } s_1 = j1$$

3-5
98-2
ر. بیات

L loop



C cutset

{# of si~=0} = 4

{# of si=0} = 2

فرکانس طبیعی صفر $s_i = 0$

پاسخ ورودی-صفر ممکن است شامل جملهٔ ثابتی باشد.

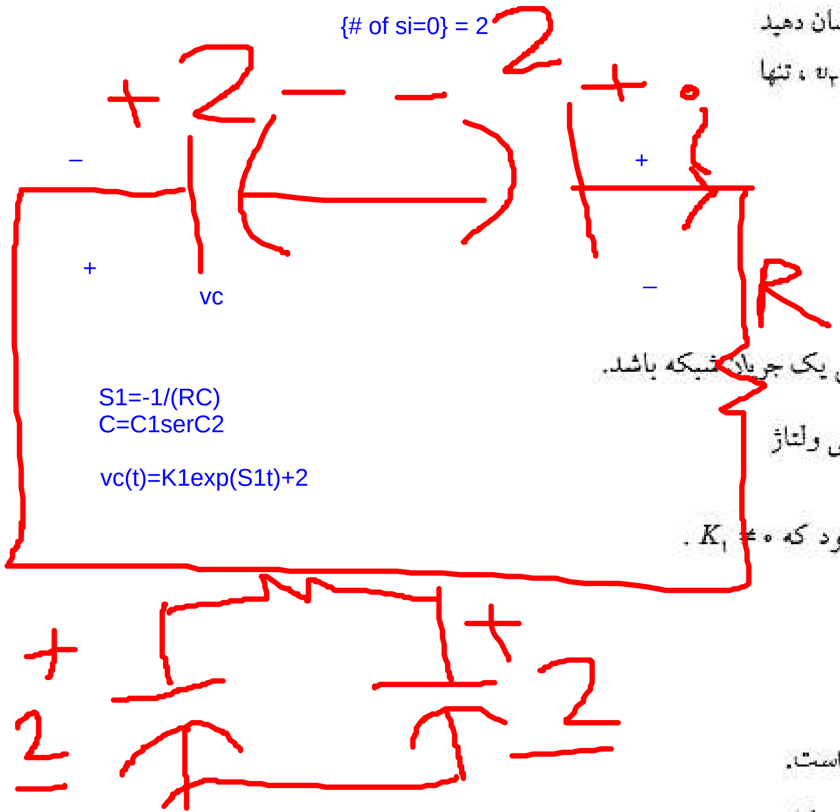
الف) جریان یک سلف در حلقه‌ای از سلف‌ها

ب) ولتاژ یک خازن در کات‌ستی از خازن‌ها

ج) خنثا شدن تلفات مقاومت ها توسط منابع وابسته

چنانچه فرکانس‌های طبیعی از مرتبهٔ m را مانند m فرکانس طبیعی به حساب بیاوریم، تعداد فرکانس‌های طبیعی برابر با مرتبهٔ معادلهٔ دیفرانسیل مینیمال است.

آیا؟ فرکانس‌های طبیعی ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها یکسان است.



تمرین شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان نشان داده شده در شکل (۱-۵) را در نظر بگیرید. نشان دهید که فرکانس‌های طبیعی متغیرهای e_1 و e_2 برابر ۱ − و $-\frac{1}{3}$ بوده، در حالی که فرکانس طبیعی v_2، تنها برابر $-\frac{1}{3}$ می‌باشد.

۲- روش حذف

۳- فرکانس‌های طبیعی شبکه

عدد s_k یک **فرکانس طبیعی** شبکه است اگر s_k فرکانس طبیعی یک ولتاژ یا فرکانس طبیعی یک جریان شبکه باشد.

۱- اگر $s_1 \neq 0$ فرکانس طبیعی یک جریان شاخه باشد، در این صورت s_1 یک فرکانس طبیعی ولتاژ شاخهٔ متناظر نیز خواهد بود.

دلیل: بنابه فرض جریان شاخهٔ j برای حالت اولیهٔ خاصی جملهٔ $K_1e^{s_1t}$ را شامل خواهد بود که $K_1 \neq 0$.

در نتیجه، ولتاژ شاخهٔ متناظر بسته به نوع شاخه چنین است:

الف - برای مقاومت، $v = Rj$ بوده و v شامل جملهٔ $R_1K_1e^{s_1t}$ است.

ب - برای سلف، $v = L\frac{dj}{dt}$ بوده و v شامل جملهٔ $LK_1s_1e^{s_1t}$ است.

پ - برای خازن، $v = v(0^-) + \frac{1}{C}\int_0^t j(t')dt'$ بوده و v شامل جملهٔ $\frac{1}{C}K_1\frac{1}{s_1}e^{s_1t}$ است.

۲- اگر $s_1 \neq 0$ بوده و اگر s_1 فرکانس طبیعی یک ولتاژ شاخه باشد، در این صورت s_1 یک فرکانس طبیعی جریان شاخهٔ متناظر نیز خواهد بود.

دلیل فیزیکی شرط $s_1 \neq 0$ اگر جریان ثابتی از سلفی عبور کند، ولتاژ دوسر سلف متحد با صفر است. به طریق دوگان، چنانچه ولتاژ ثابتی در دوسر یک خازن وجود داشته باشد، جریان خازن صفر است.

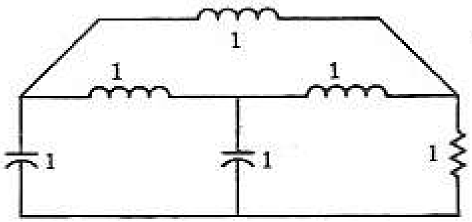
بنابراین، عدد صفر ممکن است فرکانس طبیعی جریان شاخه باشد بی‌آنکه فرکانس طبیعی ولتاژ گردد و برعکس.

یک نتیجهٔ مهم ملاحظات ۱ و ۲ این است که برای پیدا کردن فرکانس‌های طبیعی غیرصفر شبکه می‌توان از هر روش تحلیل استفاده کرد. در واقع اگر $s_1 \neq 0$ بوده و s_1 فرکانس طبیعی مثلاً جریان حلقه‌ای باشد، در این صورت s_1 لزوماً فرکانس طبیعی هر ولتاژ شاخهٔ موجود در آن حلقه خواهد بود و برعکس.

قضیه فرکانس‌های طبیعی غیرصفر هر شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان، همانند ریشه‌های غیرصفر معادلهٔ $\Delta(s) \triangleq \det[\mathbf{P}(s)] = 0$ می‌باشند که در اینجا $\mathbf{P}(s)$ ماتریس هر دستگاه معادلات دیفرانسیلی است که شبکهٔ فوق را توصیف می‌کند.

ریشه‌های غیرصفر هر دترمینان شبکه $\mathbf{P}(D)\mathbf{x} = \mathbf{f}$

تمرین تحلیل گره و مش انجام دهید و دترمینان‌ها را در $s = 0$ مقایسه و یک تعبیر فیزیکی بیان کنید.



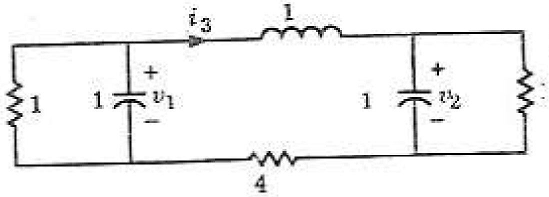
٤- فرکانس‌های طبیعی و معادلات حالت

$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t)$ حالت خاصی از دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی $\mathbf{P}(D)\mathbf{x} = \mathbf{f}$ به صورت $\mathbf{P}(D) = D\mathbf{I} - \mathbf{A}$ است.

که اپراتور ماتریسی $\mathbf{P}(D) = D\mathbf{I} - \mathbf{A}$ است. دترمینان این دستگاه عبارت است از: $\Delta(s) = \det[\mathbf{P}(s)] = \det[s\mathbf{I} - \mathbf{A}]$

بنابراین صفرهای چندجمله‌ای $\Delta(s)$ فرکانس‌های طبیعی شبکه می‌باشند.

مثال



$$\begin{bmatrix} \dot{v}_1 \\ \dot{v}_2 \\ \dot{i}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ i_3 \end{bmatrix}$$

$$s\mathbf{I} - \mathbf{A} = \begin{bmatrix} s+1 & 0 & 1 \\ 0 & s+1 & -1 \\ -1 & 1 & s+4 \end{bmatrix}$$

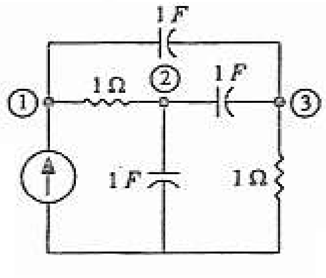
$$\Delta(s) = (s+1)(s+2)(s+3)$$

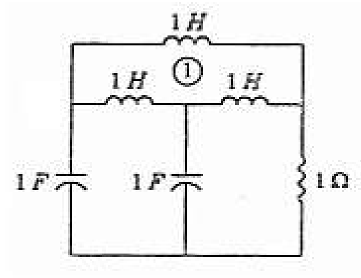
فرکانس‌های طبیعی شبکه ۱-، ۲- و ۳-

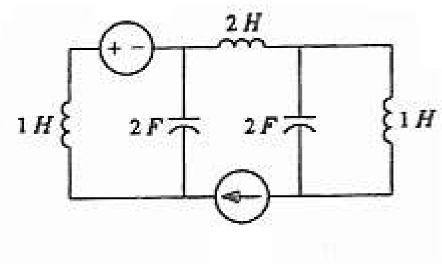
* تمامی فرکانس های طبیعی و نه فقط مخالف صفر *

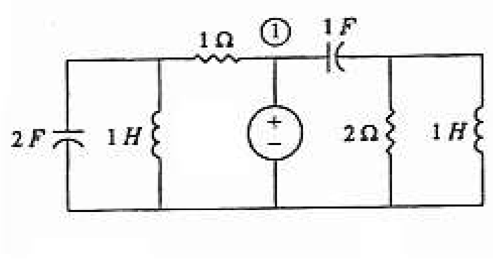
5-5
98-2
ر. بیات

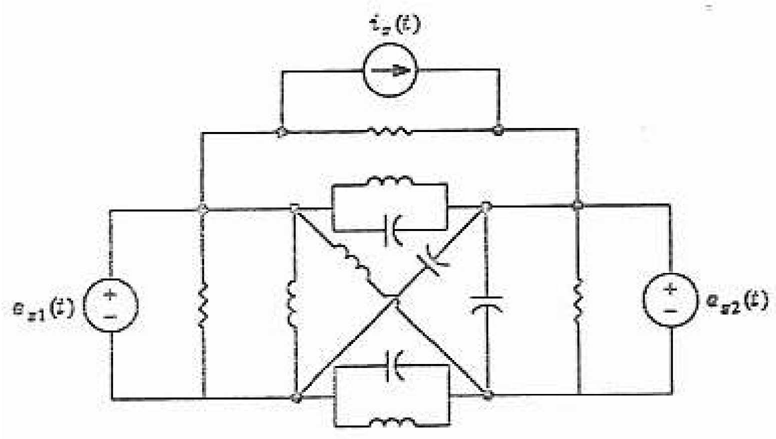
مدارهایی با ویژگی های خاص

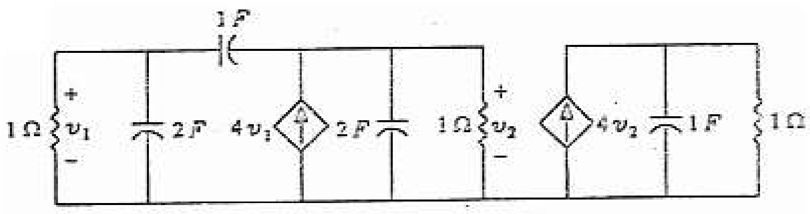












6-5
98-2
ر. بیات

ارتباط با بردارهای مشخصه با به خاطر آوردن جبر خطی، ملاحظه می‌شود که هر فرکانس طبیعی مانند s_i، مقدار مشخصهٔ ماتریس $\mathbf{A}$ می‌باشد زیرا:

$$\det[\mathrm{A} - s_i\mathrm{I}] = 0 \qquad (6)$$

متناظر با هر مقدار مشخصهٔ s_i یک بردار مشخصهٔ (غیرصفر) $\mathbf{u}_i$ وجود دارد که در معادلات زیر صدق می‌کند:

$$\mathrm{A}\mathbf{u}_i = s_i\mathbf{u}_i \qquad (7)$$

برای هر مقدار مشخصه،
می‌توان بردار مشخصه را به دست آورد:

$$\mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$s_3 = -3 \qquad s_2 = -2 \qquad s_1 = -1$$

برای تعبیر فیزیکی بردارهای مشخصه فرض کنید حالت اولیه $\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{u}_2$ باشد.

در این صورت پاسخ ورودی صفر چنین است $\mathbf{x}(t) = \mathbf{u}_2 e^{-2t}$

با جایگزینی این عبارت در معادلهٔ حالت به دست می‌آوریم $-2\mathbf{u}_2 e^{-2t} = (\mathbf{A}\mathbf{u}_2)e^{-2t} = (-2)\mathbf{u}_2 e^{-2t}$

بنابراین نتیجهٔ جالب زیر به دست می‌آید:

اگر حالت اولیه در امتداد بردار مشخصهٔ $\mathbf{u}_i$ قرار گیرد، در این صورت: (۱) مسیر حالت در امتداد این بردار مشخصه باقی می‌ماند. (۲) تمام متغیرهای شبکه با $e^{-s_i t}$ متناسب می‌گردند.

تمرین ۲ برای شبکهٔ شکل (۱-۵)، حالت اولیه‌ای چنان پیدا کنید که ولتاژ و جریان تمام شاخه‌ها با کمیت‌های زیر متناسب باشند

الف - e^{-t} ب - $e^{-(\frac{1}{3})t}$

عدد s_k را فرکانس طبیعی شبکهٔ $\mathcal{N}$ گویند اگر فرکانس طبیعی یک ولتاژ یا یک جریان آن شبکه باشد.
ممکن است s_k فرکانس طبیعی شبکهٔ $\mathcal{N}$ باشد ولی فرکانس طبیعی یک متغیر شبکهٔ خاص نباشد.

فرض کنید $\mathbf{P}(D)$ ماتریس چندجمله‌ای هر دستگاه معادلات دیفرانسیل توصیف کنندهٔ شبکهٔ $\mathcal{N}$ بوده و s_1 یک عدد غیرصفر باشد. در این صورت، s_1 یک فرکانس طبیعی است اگر و تنها اگر $\Delta(s_1) = 0$ باشد، که $\Delta(s) = \det[\mathbf{P}(s)]$.

ریشه‌های غیرصفر $\Delta(s) = 0$، فرکانس‌های طبیعی غیرصفر شبکهٔ $\mathcal{N}$ هستند.

7-5
98-2
ر. بیات

جمع بندی فصل

تعداد LC

تعداد کات ست سلفی
\+ تعداد حلقة خازنی

مرتبه مدار

تعداد $S_i = 0$ تعداد کات ست خازنی
\+ تعداد حلقة سلفی

تعداد ف.ط غیرصفر

مثال

8
1+1=2
6
1+1
4