

(۱) معادلات حالت، دسته‌ای از معادلات دیفرانسیل مرتبه یک به شکل زیر است:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{f}(t, \underline{x}(t), \underline{w}(t))$$

$\underline{x}(t)$ بردار n -مولفه‌ای حالت: انتخابی از بین پاسخ‌های سیستم که شرایط خاصی دارند.

$\underline{w}(t) \sim m$ - مولفه‌ای منابع مستقل (دورین‌ها)

$\underline{f}(t) \sim n$ - مولفه‌ای توابع (خطی یا غیرخطی)

(۲) در سیستم‌های LTI، $\underline{f}(t)$ خطی و تغییرناپذیر با زمان است:

$$\dot{\underline{x}}(t) = \underline{A} \cdot \underline{x}(t) + \underline{B} \cdot \underline{w}(t) \quad \underline{A}: n \times n \quad \underline{B}: n \times m$$

و با مشخص بودن حالت $\underline{x}$ ، خروجی y ، $y(t) = \underline{C}^T \underline{x}(t) + d \cdot \underline{w}(t) + \underline{w}_0(t)$

(۳) بنابراین حالت، این ویژگی جالب را دارد که تمامی خروجی‌ها را فقط با جمع جبری مولفه‌های

بردار حالت می‌توان به دست آورد و نیازی به عملیات مشتق و انتگرال نیست!

(۴) بردار حالت: (۱) خودکفا است؛ (۲) توصیف کاملی از پاسخ‌های شبکه را به دست می‌دهد.

(۵) در مدارهای RLCM، معمولاً ولتاژ خازن‌ها و جریان سلف‌ها را می‌توان

به عنوان درایه‌های (مولفه‌های) بردار حالت در نظر گرفت.

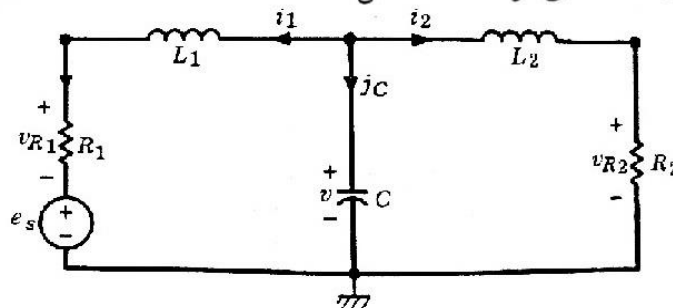
* در ادامه به مفهوم گراف، زیرگراف، حلقه، کات است، لینک و درخت نیاز است که می‌توانید

در فصل‌های ۹، ۱۰ و ۱۱ ببینید و چند تمرین انجام دهید.

(۶) الگوریتم نوشتن معادلات حالت

هدار شکل زیر را در نظر بگیرید:

گام ۱ درختی انتخاب کنید که تمام خازن‌ها را دربرداشته و هیچ سلفی را شامل نباشد. چنین درختی با سیاه‌تر کردن شاخه‌های درخت، مشخص شده است.



گام ۲ ولتاژهای خازن‌های شاخه‌های درخت و جریانهای سلف‌های لینک‌ها را به عنوان متغیر به کار ببرید. بدین ترتیب، v ، i_1 و i_2 را در این مثال به کار می‌بریم.

گام ۳ برای هر خازن، یک معادله کات است اساسی بنویسید. توجه کنید در این معادلات کات است، تمام جریانهای شاخه‌ها باید برحسب متغیرهای انتخاب شده در گام ۲ بیان شوند. برای خازن چنین به دست می‌آوریم:

$$C \frac{dv}{dt} = -i_1 - i_2$$

گام ۴ برای هر سلف، یک معادله حلقه اساسی بنویسید. توجه کنید که در این معادلات حلقه، تمام ولتاژهای شاخه‌ها (به جز منابع نابسته) باید برحسب متغیرهای انتخاب شده در گام ۲ بیان شوند. برای سلف اول داریم:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -v_{R1} - e_s + v$$

و برحسب متغیرهای انتخاب شده i_1 ، i_2 و v به دست می‌آید:

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 - e_s + v$$

برای سلف دوم داریم:

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -v_{R2} + v = -R_2 i_2 + v$$

بدین ترتیب، دستگاه معادلات حالت زیر را به دست می‌آوریم:

$$C \frac{dv}{dt} = -i_1 - i_2$$

$$L_1 \frac{di_1}{dt} = -R_1 i_1 + v - e_s$$

$$L_2 \frac{di_2}{dt} = -R_2 i_2 + v$$

چنانچه دستگاه معادلات فوق را به صورت ماتریسی بنویسیم:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv}{dt} \\ \frac{di_1}{dt} \\ \frac{di_2}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} & -\frac{1}{C} \\ \frac{1}{L_1} & -\frac{R_1}{L_1} & 0 \\ \frac{1}{L_2} & 0 & -\frac{R_2}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{1}{L_1} \\ 0 \end{bmatrix} e_s$$

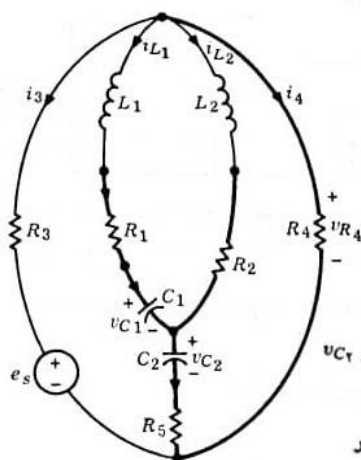
حالت اولیه در لحظه $t = 0$:

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0) = \begin{bmatrix} v(0) \\ i_1(0) \\ i_2(0) \end{bmatrix}$$

مدار شکل زیر را در نظر بگیرید.

بردار حالت برای این مدار چنین است: $\underline{x} = \begin{bmatrix} \varphi_{C1} \\ \varphi_{C2} \\ i_{L1} \\ i_{L2} \end{bmatrix}$

متغیرها را جابجاستر در نظر گرفت.



گام ۱ درختی را انتخاب می‌کنیم که C_1 و C_2 را دربرداشته و شامل L_1 و L_2 نباشد.

در موارد خاصی ممکن است خروجی به مشتقات ورودی w نیز بستگی داشته باشد.

گام ۲ متغیرهای حالت را با جریانهای سلفهای i_{L1} و i_{L2} و ولتاژهای خازنهای v_{C1} و v_{C2} مشخص می‌کنیم.

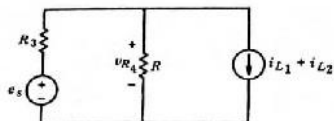
گام ۳ معادلات کاتست برای کاتست‌های اساسی که توسط خازنها تعریف می‌شوند

$$C_1 \frac{dv_{C1}}{dt} = i_{L1} \quad C_2 \frac{dv_{C2}}{dt} = i_{L1} + i_{L2}$$

گام ۴ معادلات حلقه را برای حلقه‌های اساسی که توسط سلفها تعریف می‌شوند، می‌نویسیم. به خاطر بیاورید که باید تمام ولتاژها برحسب i_{L1} ، i_{L2} ، v_{C1} و v_{C2} بیان شوند. بدین ترتیب به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned} L_1 \frac{di_{L1}}{dt} &= -v_{R1} - v_{C1} - v_{C2} - v_{R5} + v_{Rr} \\ &= -R_1 i_{L1} - v_{C1} - v_{C2} - R_5 (i_{L1} + i_{L2}) + v_{Rr} \end{aligned} \quad (1-10)$$

در این مورد، ملاحظه می‌شود که مثل حالت قبل خوش شانس نیستیم، زیرا جمله v_{Rr} موجود در سمت راست معادله بالا، یکی از متغیرهای حالت نیست.



بدین ترتیب:

$$\begin{aligned} \frac{di_{L1}}{dt} &= -\frac{v_{C1}}{L_1} - \frac{v_{C2}}{L_1} - \frac{(R_1 + R)}{L_1} i_{L1} - \frac{R}{L_1} i_{L2} + \frac{R_r}{L_1(R_r + R_r)} e_s \\ R &= R_5 + \frac{R_r R_r}{R_r + R_r} \end{aligned}$$

و

$$\frac{di_{L2}}{dt} = -\frac{v_{C2}}{L_2} - \frac{R}{L_2} i_{L1} - \frac{(R_r + R)}{L_2} i_{L2} + \frac{R_r}{L_2(R_r + R_r)} e_s$$

بنابراین معادلات حالت، چنین هستند:

$$\begin{bmatrix} \frac{dv_{C_1}}{dt} \\ \frac{dv_{C_2}}{dt} \\ \frac{di_{L_1}}{dt} \\ \frac{di_{L_2}}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{C_1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_2} & \frac{1}{C_2} \\ -\frac{1}{L_1} & -\frac{1}{L_1} & -\frac{R_1+R}{L_1} & -\frac{R}{L_1} \\ 0 & -\frac{1}{L_2} & -\frac{R}{L_2} & -\frac{R_2+R}{L_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{1}{L_1} \\ \frac{1}{L_2} \end{bmatrix} \frac{R_2}{R_2+R_1} e_s$$

چنانچه v_{R_2} خروجی باشد،

$$v_{R_2}(t) = -\frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} i_{L_1}(t) - \frac{R_2 R_2}{R_2 + R_1} i_{L_2}(t) + \frac{R_2}{R_2 + R_1} e_s(t)$$

به شکل استاندارد:

$$v_{R_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{R_2 R_1}{R_2 + R_1} & -\frac{R_2 R_2}{R_2 + R_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{C_1} \\ v_{C_2} \\ i_{L_1} \\ i_{L_2} \end{bmatrix} + \frac{R_2}{R_2 + R_1} e_s$$

تبصره در انتخاب جریانهای سلف‌ها و ولتاژهای خازن‌ها به عنوان متغیرهای حالت، تعصب خاصی وجود ندارد. به طریق مشابه، شارهای سلف‌ها و بارهای خازن‌ها را نیز می‌توانستیم انتخاب کنیم. در واقع، در مورد شبکه‌های تغییرپذیر با زمان، چنین انتخابی مزایای روشنی دارد. این وضع، تا اندازه‌ای مشابه وضع موجود در مکانیک ذره‌ای است که در آن‌جا موقعیت و سرعت ذرات و یا موقعیت و مقدار حرکت ذرات را می‌توان به عنوان متغیر، انتخاب نمود.

چند مدار با شرایط خاص که در کلاس بررسی خواهد شد

