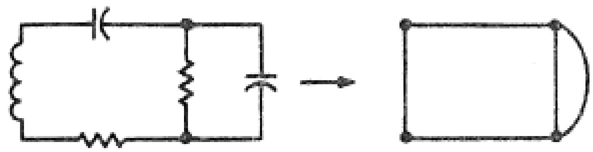
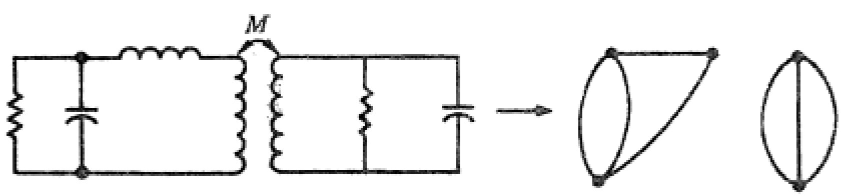
۹

گراف‌های شبکه و قضیهٔ تلگان

در قسمت اول این کتاب ما با بسیاری از مفاهیم مهم و خواص مدارها آشنا شدیم. برای اینکه کمکی در درک آنها گردد، این مفاهیم را تنها با مدارهای ساده تشریح کردیم. مدارهای نوعی که ما در نظر گرفتیم به استثنای فصل ۷، تنها شامل چند عنصر بودند و به وسیلهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول یا دوم توصیف می‌شدند. در قسمت دوم این کتاب می‌خواهیم برای تجزیه و تحلیل و تعیین خواص یک شبکه، به هر پیچیدگی که باشد، روشهای منظمی را به وجود آوریم. توجه کنید که ما کلمهٔ **شبکه** را که معنی یکسان با مدار (یعنی به هم پیوستنی از اجزاء) دارد، به کار می‌بریم. با وجود این، کلمهٔ "شبکه" معمولاً ایدهٔ پیچیده بودن را دارد (یک شبکه مداری است که اجزای بیشتری داشته باشد). بعضی شبکه‌ها در عمل بسیار پیچیده هستند و ممکن است دارای صدها عنصر باشند.



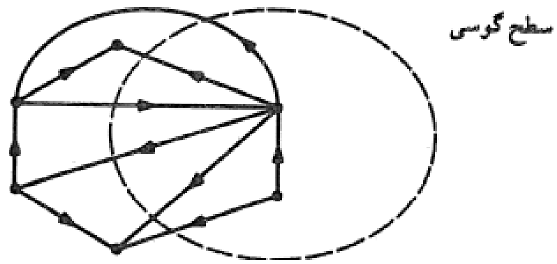
(الف) شبکهٔ $\mathcal{N}$



(ب) شبکهٔ $\mathcal{N}$

شکل ۱-۱ شبکه‌ها و گراف‌های آنها. (الف) گراف با چهار گره و پنج شاخه. (ب) گراف با دو جزء مجزا، پنج گره و هفت شاخه.

برای اینکه بتوان بدون تأمل و به طور منظم KCL را برای هر شبکه بیان نمود، اکنون مفهوم کات‌ست را توسعه می‌دهیم. به طور کلی قانون KCL بیان می‌دارد که مجموع جبری تمام جریانهایی که از یک گره خارج می‌شوند مساوی صفر است. پس به طور حسی، چنانکه گره‌های یک شبکه را به وسیلهٔ یک سطح گوسی بسته[1] به دو دسته تفکیک کنیم به قسمی که دسته‌ای از گره‌ها در داخل سطح فوق و دستهٔ دیگر در خارج آن باشند (شکل (۲-۱) را ببینید)، در این صورت KCL لازم می‌دارد که مجموع جریانهایی که از سطح گوسی خارج می‌شوند، مساوی صفر باشد. در بیشتر موارد، به مجموعهٔ تمام شاخه‌هایی که سطح گوسی را قطع می‌کنند یک کات‌ست گفته خواهد شد.

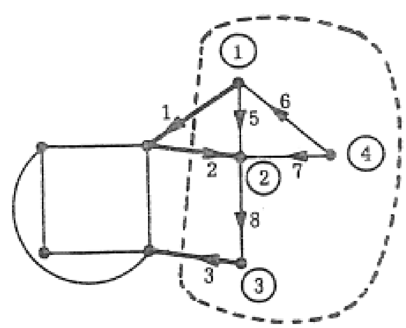


شکل ۲-۱ سطح گوسی که به طور حسی به مفهوم کات‌ست منجر می‌شود.

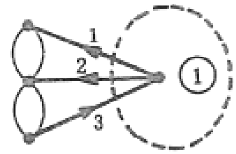
دسته‌ای از شاخه‌های یک گراف پیوستهٔ $\mathcal{G}$ را **کات‌ست** نامند چنانچه: (۱) حذف تمام شاخه‌های این دسته موجب شود که گراف باقیمانده دارای دو جزء جدا از هم باشد و (۲) حذف تمام شاخه‌های این دسته به جز یکی از آنها یک گراف پیوسته باقی گذارد.

قانون جریان کیرشف

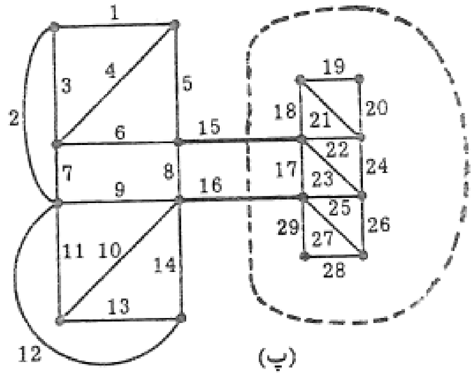
برای هر شبکهٔ فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از کات‌ست‌های آن، مجموع جبری جریان تمام شاخه‌های کات‌ست مساوی صفر است.



(الف)



(ب)

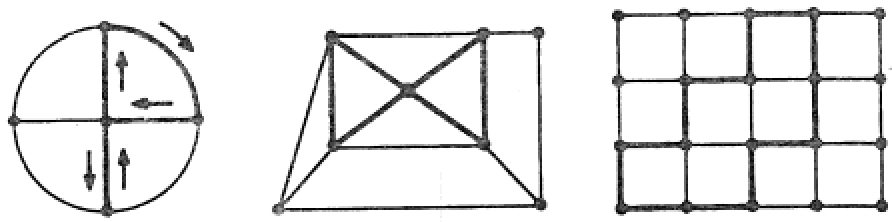


(پ)

۳- حلقه‌ها و قانون ولتاژ کیرشف

قانون ولتاژ کیرشف

برای هر شبکهٔ فشرده و در هر لحظه از زمان و برای هر یک از حلقه‌های آن، مجموع جبری ولتاژ تمام شاخه‌هایی که در یک حلقه قرار دارند، مساوی صفر است.



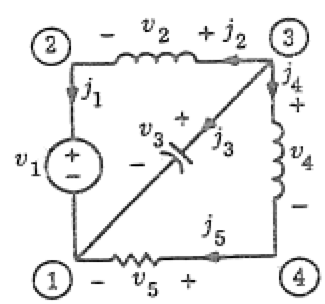
(پ) (ب) (الف)

شکل ۳-۱ شاخه‌های مشخص شده در سه شکل بالا مسیرهای بسته می‌باشند. تنها حالت (الف) شرایط حلقه بودن را داراست.

٤- قضیهٔ تلگان

در این بخش ما اولین قضیهٔ مربوط به شبکهٔ کلی، یعنی قضیهٔ تلگان را معرفی می‌کنیم.

$$\boxed{\sum_{k=1}^{b} v_k j_k = 0}$$



این قضیه

کلی است و برای هر شبکهٔ فشرده که شامل هر تعداد اجزای خطی یا غیرخطی، پسیو یا اکتیو، تغییرپذیر یا تغییرناپذیر با زمان باشد، معتبر می‌باشد. این کلیت ناشی از این حقیقت است که قضیهٔ تلگان، تنها به دو قانون کیرشف بستگی دارد.

ماهیت اجزاء و یا در حقیقت وجود یا عدم وجود اجزایی که این j_kها و v_kها را به عنوان جریانهای شاخه‌ها و ولتاژهای شاخه‌ها دارا باشند، مطلقاً ربطی به درستی قضیهٔ تلگان ندارد. قدرت این قضیه روی این حقیقت قرار دارد که v_kها و j_kها اختیاری هستند و تنها باید محدودیت‌های کیرشف را برآورند.

۵ - کاربردها

۵-۱ بقای انرژی

با در نظر گرفتن یک شبکهٔ دلخواه و با استفاده از طرز نمایش قضیهٔ تلگان داریم:

$$\sum_{k=1}^{b} v_k(t)\,j_k(t) = 0 \qquad \text{برای همهٔ } t$$

$v_k(t)\,j_k(t)$ توانی است که شبکه در لحظهٔ t به شاخهٔ k تحویل می‌دهد،
مجموع توان تحویل داده شده به شاخه‌های شبکه در هر لحظهٔ t برابر صفر است.

این مطلب از دیدگاه فلسفی بدین معنی است که

KVL و KCL تا آنجا که مدارهای نشرده مورد توجه است، اصل بقای انرژی را لازم می‌دارند.

توانی که منابع تحویل می‌دهند برابر با شدت جذب انرژی در شبکه است.

انرژی یا در مقاومتها با شدت $R_k j_k^2(t)$ برای مقاومت kام تلف می‌شود

یا به صورت انرژی مغناطیسی در سلف‌ها $\left[\frac{1}{2} L_k j_k^2(t)\right]$

یا به صورت انرژی الکتریکی در خازنها $\left[\frac{1}{2} C_k v_k^2(t)\right]$ ذخیره می‌شود.

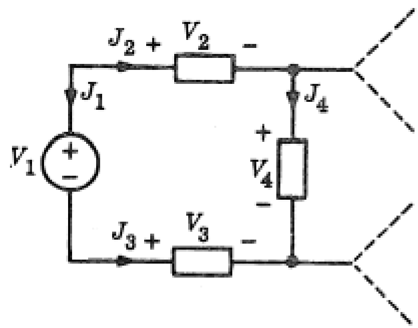
در مواقعی که اجزا تغییرپذیر با زمان باشند (موتورها و مولدهای الکتریکی یا آمپلی فایرهای پارامتری)، بحث مطالب فوق بسیار پیچیده بوده و در فصل ۱۹ انجام خواهد گرفت.

تبصره قضیهٔ تلگان دارای پاره‌ای نتایج شگفت‌آور می‌باشد. به عنوان مثال دو شبکهٔ نشردهٔ دلخواهی را در نظر بگیرید که تنها محدودیت آنها این باشد که گراف یکسان داشته باشند.

۵-۲ بقای توان مختلط

یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان را در نظر بگیرید و برای سادگی فرض کنید که این شبکه، مطابق شکل (۵-۱)، تنها دارای یک منبع سینوسی در شاخهٔ ۱ بوده و در حالت دایمی سینوسی باشد. برای هر شاخه (هنوز جهت‌های قراردادی متناظر به کار می‌رود)، ولتاژ شاخهٔ v_k را با فازور V_k و جریان شاخهٔ j_k را با فازور J_k نشان می‌دهیم. واضح است که V_1 ، V_2 ، ... ، V_b و J_1 ، J_2 ، ... ، J_b در تمام محدودیت‌هایی که به وسیلهٔ KVL و KCL اعمال می‌شود، صدق می‌کنند. همچنین مزدوج‌های $\bar{J}_1$ ، $\bar{J}_2$ ، ... ، $\bar{J}_b$ نیز در تمام محدودیت‌های KCL صدق می‌کنند. بنابراین با استفاده از قضیهٔ تلگان:

$$\sum_{k=1}^{b} \frac{1}{2} V_k \bar{J}_k = 0 \qquad (۵-۱)$$



چون V_1 ولتاژ منبع و J_1 جریان متناظری است که نسبت به جهت قراردادی متناظر سنجیده می‌شود، پس $\frac{1}{2}V_1\bar{J}_1$ توان مختلطی است که توسط بقیهٔ شبکه به شاخهٔ ۱ تحویل داده می‌شود و بنابراین $-\frac{1}{2}V_1\bar{J}_1$ توان مختلطی است که منبع به بقیهٔ شبکه تحویل می‌دهد. معادلهٔ (۵-۱) را دوباره به صورت زیر می‌نویسیم:

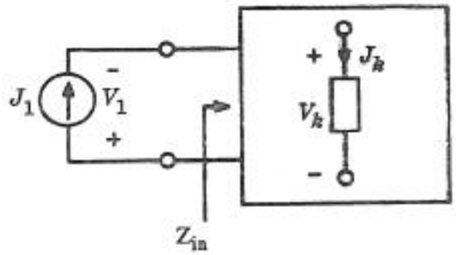
$$-\frac{1}{2}V_1\bar{J}_1 = \sum_{k=2}^{b} \frac{1}{2} V_k \bar{J}_k$$

واضح است که رابطهٔ بالا را می‌توان برای شبکه‌هایی که بیش از یک منبع دارند، تعمیم داد. بنابراین ما قضیهٔ بقای توان مختلط را به صورت زیر بیان می‌کنیم:

قضیه یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان در حالت دایمی سینوسی بوده و توسط منبع نابسته تحریک می‌شود. در این صورت توان مختلطی که به وسیلهٔ منبع نابسته به شبکهٔ $\mathscr{N}$ تحویل داده می‌شود مساوی توان مختلطی است که به وسیلهٔ شاخه‌های شبکهٔ $\mathscr{N}$ دریافت می‌شود.

۵-۳ جزء حقیقی و فاز امپدانس‌های نقطهٔ تحریک

قضیهٔ بقای توان مختلط را می‌توان برای به دست آوردن بسیاری از خواص مهم امپدانس‌های نقطهٔ تحریک به کار برد. با مراجعه به شکل (۵-۳) می‌خواهیم امپدانس نقطهٔ تحریک Z_{in} شبکهٔ یک قطبی خطی و تغییرناپذیر با زمان $\mathcal{N}$ راکه تنها شامل مقاومتها، سلف‌ها و خازنها و/ یا ترانسفورماتورها



RLC

شکل ۵-۳ خواص امپدانس نقطهٔ تحریک $Z_{in}(j\omega)$

می‌باشد، در نظر بگیریم. فرض کنید که شبکهٔ $\mathcal{N}$ به وسیلهٔ یک منبع جریان سینوسی با فرکانس زاویه‌ای ω ، تحریک می‌شود و منبع جریان با فازور J_1 و ولتاژی که در جهت قراردادی متناظر منبع سنجیده می‌شود با فازور V_1 نشان داده شود. واضح است که: $V_1 = -J_1 Z_{in}(j\omega)$

فرض کنید شاخه‌های درون $\mathcal{N}$ از ۲ تا b شماره‌گذاری شده و برای $k = ۲, ۳, \cdots, b$ فازور جریانهای شاخه‌ها با J_k و امپدانس‌های شاخه‌ها با Z_k مشخص گردیده‌اند. فرض کنید P توان مختلطی باشد که منبع به یک قطبی تحویل می‌دهد. با استفاده از قضیهٔ تلگان به دست می‌آوریم:

$$P = -\frac{۱}{۲} V_1 \bar{J}_1 = \frac{۱}{۲} Z_{in}(j\omega) |J_1|^۲$$
$$= \frac{۱}{۲} \sum_{k=۲}^{b} V_k \bar{J}_k = \frac{۱}{۲} \sum_{k=۲}^{b} Z_k(j\omega) |J_k|^۲ \qquad (۵-۲)$$

چنانچه جزء حقیقی معادلهٔ (۵-۲) در نظر گرفته شود، P_{av} یعنی توان متوسطی که منبع به $\mathcal{N}$ تحویل می‌دهد به دست می‌آید و داریم:

Pactive=Paverage=Re{P}
Preactive=Im{P}

$$P_{av} = \frac{۱}{۲} \text{Re}[Z_{in}(j\omega)] |J_1|^۲ = \frac{۱}{۲} \sum_{k=۲}^{b} \text{Re}[Z_k(j\omega)] |J_k|^۲$$

توجه کنید که همهٔ این امپدانس‌ها در فرکانس زاویه‌ای یکسان ω که همان فرکانس زاویه‌ای منبع می‌باشد، محاسبه می‌شوند. حال می‌خواهیم استنباطهای معادلهٔ (۵-۲) را برای حالت‌های زیر بررسی کنیم.

حالت ۱ حالتی که شبکه‌های مقاومتی از شاخه‌هایی که همه، مقاومتهای مثبت داشته باشند، ساخته شود: در این صورت همهٔ Z_k ها در معادلهٔ (۵-۲) عددهای حقیقی مثبت هستند و در نتیجه Z_{in} یعنی مقاومت ورودی یک عدد حقیقی مثبت می‌باشد. در این حالت Z_{in} به فرکانس زاویه‌ای ω بستگی ندارد و بنابراین امپدانس ورودی یک شبکهٔ مقاومتی که از مقاومتهای مثبت ساخته شده باشد، یک مقاومت مثبت می‌باشد.

حالت ۲ حالتی که شبکه‌های RL از شاخه‌هایی ساخته شوند که همه مثبت باشند: در این صورت Z_k یا یک عدد حقیقی مثبت یا یک عدد انگاری خالص به صورت $j\omega L_k$ است.

بدین ترتیب از معادلهٔ (۵-۲) داریم:

$$\mathrm{Re}[Z_{in}(j\omega)] \geq 0 \quad \text{و} \quad \mathrm{Im}[Z_{in}(j\omega)] \geq 0 \qquad \text{برای همهٔ } \omega \geq 0$$

یا به طور معادل:

$$0 \leq \measuredangle Z_{in}(j\omega) \leq 90^\circ \qquad \text{برای همهٔ } \omega \geq 0$$

بدین ترتیب نشان دادیم که در هر فرکانس زاویه‌ای مثبت ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک یک مدار RL خطی تغییرناپذیر با زمان که از مقاومتهای مثبت و اندوکتانس‌های مثبت ساخته شده باشد، دارای زاویهٔ فازی بین ۰ و ۹۰° است.

حالت ۳ حالتی که شبکه‌های RC از شاخه‌هایی ساخته می‌شوند که همه یا دارای مقاومتهای مثبت و یا ظرفیت‌های مثبت باشند: یک استدلال مشابه نشان می‌دهد که در هر فرکانس زاویه‌ای مثبت ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک یک مدار RC خطی تغییرناپذیر با زمان که از مقاومتهای مثبت و ظرفیت‌های مثبت ساخته شده باشد، دارای زاویهٔ فازی بین ۰ و ۹۰°- است.

حالت ٤ حالتی که شبکه‌های بی‌اتلاف از خازنها و سلف‌ها (شامل سلف‌های تزویج شده) و/ یا ترانسفورماتورهای ایده‌آل، ساخته شده باشد: در بخش ۲ فصل ۸ بیان کردیم که سلف‌های تزویج شده را می‌توان با سلف‌های تزویج نشده و یک ترانسفورماتور ایده‌آل جانشین نمود. بنابراین در داخل یک قطبی $\mathcal{N}$ می‌توان فرض نمود که تمام شاخه‌ها اندوکتانس‌های مثبت، ظرفیت‌های مثبت یا سیم‌پیچ‌های ترانسفورماتور ایده‌آل می‌باشند. چون ترانسفورماتورهای ایده‌آل انرژی تلف نکرده و هیچ انرژی ذخیره نمی‌کنند، پس مجموع $\sum_k V_k \bar{J}_k$ روی تمام شاخه‌هایی که ترانسفورماتور ایده‌آل دارند برابر صفر است؛ بنابراین ترانسفورماتورهای ایده‌آل، چیزی به مجموع نشان داده شده در معادلهٔ (۵-۲) اضافه نمی‌کنند. جمله‌های دیگر یا به صورت $j\omega L_k|J_k|^2$ یا $\left(\frac{1}{j\omega C_k}\right)|J_k|^2$ می‌باشند که در هر دو حالت انگاری خالص می‌باشند و بنابراین:

$$\mathrm{Re}[Z_{in}(j\omega)] = 0 \qquad \text{برای همهٔ } \omega \qquad (۵\text{-}۳)$$

یا به طور معادل:

$\mathrm{Im}\{Z_{in}(j\omega)\} \gtrless 0$

$$\measuredangle Z_{in}(j\omega) = \pm 90^\circ \qquad \text{برای همهٔ } \omega$$

از این‌رو به این نتیجه می‌رسیم که در هر فرکانس زاویه‌ای ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک یک شبکهٔ خطی تغییرناپذیر با زمان که از سلف‌ها (تزویج شده یا تزویج نشده)، خازنها و ترانسفورماتورهای ایده‌آل ساخته شده باشد، انگاری خالص است؛ یعنی دارای زاویهٔ فازی برابر ۹۰°- یا ۹۰°+ می‌باشد.

حالت ۵ حالتی که شبکه‌های RLC با ترانسفورماتورهای ایده‌آل، شامل شاخه‌هایی باشند که همه، مقاومتهای مثبت یا اندوکتانس‌های مثبت، ظرفیت‌های مثبت و/ یا سیم‌پیچ ترانسفورماتورهای ایده‌آل باشند: مانند حالت ۴، ترانسفورماتورهای ایده‌آل چیزی به مجموع نشان داده شده در معادلهٔ (۵-۲) اضافه نمی‌کنند. جملات دیگر به صورت: $R_k|J_k|^2$ ، $j\omega L_k|J_k|^2$ یا $\left(\frac{1}{j\omega C_k}\right)|J_k|^2$ می‌باشند. بنابراین هر جملهٔ $Z_k|J_k|^2$ یک عدد مثبت یا یک عدد انگاری است. از این‌رو Z_{in} عدد مختلطی است که جزء حقیقی آن بزرگتر یا مساوی صفر بوده و جزء انگاری آن ممکن است علامت مثبت یا منفی داشته باشد. بنابراین نتیجه می‌گیریم که در هر فرکانس زاویه‌ای ω ، امپدانس نقطهٔ تحریک یک شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان (که ممکن است شامل ترانسفورماتورهای ایده‌آل نیز باشد)، دارای جزء حقیقی نامنفی است. یا به طور معادل دارای زاویهٔ فاز بین ۹۰°- و ۹۰°+ می‌باشد. یعنی :

$$\mathrm{Re}[Z_{in}(j\omega)] \geq 0 \qquad \text{برای همهٔ } \omega \qquad (۵\text{-}۴)$$

یا به طور معادل:

$$-90^\circ \leq \measuredangle Z_{in}(j\omega) \leq 90^\circ \qquad \text{برای همهٔ } \omega$$

شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان راکه توسط یک منبع جریان سینوسی تنها تحریک می‌شود، مجدداً در نظر می‌گیریم (شکل (۵-۳) را ببینید). باز هم فرض می‌کنیم که شبکه در حالت دایمی سینوسی باشد. توان مختلطی راکه منبع به شبکه تحویل می‌دهد با به کار بردن طرز نمایش قبلی می‌توان به صورت زیر نوشت (معادلهٔ (۵-۲) را ببینید):

$$P = \frac{1}{2} Z_{\text{in}}(j\omega)\,|J_1|^2 = \frac{1}{2} \sum_{m=2}^{b} Z_m(j\omega)\,|J_m|^2$$
$$= \frac{1}{2} \sum_i R_i|J_i|^2 + \frac{1}{2} \sum_k j\omega L_k|J_k|^2 + \frac{1}{2} \sum_l \frac{1}{j\omega C_l}|J_l|^2$$

که در آن، جملات متناظر با مقاومتها، سلف‌ها و خازنها را به صورت مجموعهای جداگانه نوشته‌ایم. با نمایش جزء‌های حقیقی و انگاری P ، به دست می‌آوریم:

$$P = \frac{1}{2} \sum_i R_i|J_i|^2 + 2j\omega\Big(\sum_k \frac{1}{4} L_k|J_k|^2 - \sum_l \frac{1}{4}\frac{1}{\omega^2 C_l}|J_l|^2\Big) \qquad (۵-۵)$$

قبلاً دیده‌ایم که در حالت دایمی سینوسی، متوسط $R_i j_i^2(t)$ (در طول یک پریود) چنین است:

$$\frac{1}{2} R_i|J_i|^2$$

به طریق مشابه، متوسط $\frac{1}{2} L_k j_k^2(t)$ چنین است:

$$\frac{1}{4} L_k|J_k|^2$$

و متوسط $\frac{1}{2} C_l v_l^2(t)$ چنین است:

$$\frac{1}{4} C_l|V_l|^2 = \frac{1}{4}\frac{1}{\omega^2 C_l}|J_l|^2$$

بنابراین، جملهٔ اول معادلهٔ (۵-۵) توان متوسط تلف شده در $\mathscr{N}$ بوده (که با P_{av} نشان داده می‌شود) و دو جملهٔ داخل پرانتز به ترتیب انرژی مغناطیسی متوسط ذخیره شدهٔ $\mathscr{E}_M$ و انرژی الکتریکی متوسط ذخیره شدهٔ $\mathscr{E}_E$ می‌باشد. بنابراین، معادلهٔ (۵-۵) را می‌توان چنین نوشت:

$$Z_{\text{in}}(j\omega) = \frac{2P_{\text{av}} + 4j\omega(\mathscr{E}_M - \mathscr{E}_E)}{|J_1|^2} \qquad (۵-۶)$$

باید تأکید نمود که: (۱) $|J_1|$ حداکثر دامنهٔ جریان سینوسی ورودی می‌باشد، (۲) P_{av} ، $\mathscr{E}_M$ و $\mathscr{E}_E$ به ترتیب توان متوسط تلف شده، انرژی مغناطیسی متوسط ذخیره شده و انرژی الکتریکی متوسط ذخیره شده می‌باشند و (۳) این سه مقدار متوسط به وسیلهٔ متوسط‌گیری در طول یک پریود آن حرکت سینوسی، حاصل شده‌اند. بنابراین ما نتیجهٔ زیر را برقرار کردیم.

قضیه یک شبکهٔ RLC خطی تغییرناپذیر با زمان که به وسیلهٔ یک منبع جریان سینوسی با دامنهٔ حداکثر یک آمپری تحریک می‌شود، داده شده است و با فرض اینکه شبکه در حالت دایمی سینوسی باشد، امپدانس نقطهٔ تحریکی که توسط منبع دیده می‌شود دارای یک جزء حقیقی است که مساوی دو برابر توان متوسط تلف شده می‌باشد و دارای یک جزء انگاری است که مساوی 4ω برابر تفاضل میان متوسط انرژی مغناطیسی ذخیره شده و متوسط انرژی الکتریکی ذخیره شده می‌باشد.